Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
13. November, 2013

Übungsblatt 4

Abgabe: 19. November, 2013

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 13: Es seien M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(U, \xi = (x^1, \ldots, x^n))$ und $(V, \eta = (y^1, \ldots, y^n))$ zwei Karten von M. Zeigen Sie:

(a) Für alle $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{auf} \quad U \cap V,$$

wobei die Matrix $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ genau die Jacobi-Matrix $J_{\eta \circ \xi^{-1}}$ der Kartenwechselabbildung $\eta \circ \xi^{-1} : \xi(U \cap V) \to \eta(U \cap V)$ ist.

(b) Für alle $\alpha \in \mathscr{X}^*(M)$ gilt

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dx^i \quad \text{auf} \quad U.$$

Berechnen Sie dann dx^j bezüglich der dy^i und der Jacobi-Matrix $J_{\eta \circ \xi^{-1}}$ für alle $1 \leq j \leq n$.

Aufgabe 14: *(Die Lie-Klammer)* Es sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Für $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ definieren wir die *Lie-Klammer* $[X, Y]$ von X und Y als

$$[X, Y] \colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M) \quad \text{mit} \quad [X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $[X, Y] \in \mathscr{X}(M)$ und $[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$ für alle $p \in M$ und $f \in \mathscr{F}(M)$.

(b) Die Lie-Klammer auf $\mathscr{X}(M)$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) (Schiefsymmetrisch) $[X, Y] = -[Y, X]$;

(ii) $[f \cdot X, g \cdot Y] = f \cdot g \cdot [X, Y] + f \cdot X(g) \cdot Y - g \cdot Y(f) \cdot X$ für alle $f, g \in \mathcal{F}(M)$;

(iii) (Jacobi-Identität) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

(c) Für jede Karte $(U, \xi = (x^1, \ldots, x^n))$ von M gilt $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

(d) Falls $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, dann gilt

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x^j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Aufgabe 15:

(a) Es seien M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $P \subset M$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M mit $j\colon P \hookrightarrow M$ der Inklusionsabbildung. Zeigen Sie: Für alle $p \in P$ ist

$$Dj_p\colon T_pP \to \{X \in T_pM \mid X(f) = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{F}(M) \text{ mit } f|_P = 0\}.$$

ein Isomorphismus. Dadurch können wir T_pP mit dem Unterraum $\{X \in T_pM \mid X(f) = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{F}(M) \text{ mit } f|_P = 0\}$ des T_pM identifizieren.

(b) Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Es sei $n \in N$ ein regulärer Wert von F. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $P := F^{-1}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist. Zeigen Sie, dass für alle $p \in P$ die Abbildung Dj_p einen Isomorphismus

$$T_pP \cong \operatorname{Ker}(DF_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N)$$

liefert, wobei $j\colon P \to M$ die Inklusion ist.

Aufgabe 16: Es seien $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ der Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie aus $\mathbb{R}^{n^2}$ und $E \in M_n(\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix.

(a) Es sei

$$\operatorname{Sym}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$$

die Menge der symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Sym}(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ ein Untervektorraum der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ ist.

(b) Es sei die Abbildung

$$f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \operatorname{Sym}(n) \quad \text{mit} \quad f(A) = A^t \cdot A$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $E \in \operatorname{Sym}(n)$ ein regulärer Wert von f ist.

(c) Es sei

$$\mathbb{O}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = E\}$$

die orthogonale Gruppe. Zeigen Sie, dass $\mathbb{O}(n)$ eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{R})$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass $T_E\mathbb{O}(n)$ mit einem Unterraum von $M_n(\mathbb{R})$ identifiziert werden kann, und zwar mit $\{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B^t + B = 0\}$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.