Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
MMath. Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Komplexe Geometrie
WS 08/09

Übungsblatt 8

29. (a) (2 Punkte) Sei (X, g) eine kompakte hermitesche Mannigfaltigkeit und sei $[\alpha] \in \mathrm{H}^{p,q}(X)$. Zeigen Sie, dass der harmonische Repräsentant der Klasse $[\alpha]$ die eindeutige $\bar{\partial}$–geschlossene Form mit minimaler Norm $\|\alpha\|$ ist.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass holomorphe Formen, d.h. Elemente aus $H^0(X, \Omega^p)$ auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit X harmonisch bezüglich einer beliebigen Kählermetrik sind.

30. (4 Punkte) Es sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und seien ω und ω' zwei kohomologe Kählerformen, d.h. $[\omega] = [\omega'] \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es eine reelle Funktion f gibt, so dass gilt: $\omega' = \omega + i\partial\bar{\partial}f$.

31. (4 Punkte) Es sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und $\alpha \in \mathcal{A}^k(X)$ eine d^c–exakte und d–geschlossene Form. Zeigen Sie, dass es eine Form $\beta \in \mathcal{A}^{k-2}(X)$ gibt, so dass gilt: $\alpha = \mathrm{dd}^c\beta$.

32. Es sei (X, ω) eine Kählermannigfaltigkeit der Dimension n und sei W eine holomorphe Funktion $W : X \to \mathbb{C}$.

    (a) (1 Punkte) Zeigen Sie, dass W konstant sein muss, falls X kompakt ist.

    (b) (2 Punkte) Nehmen Sie nun an, dass X nicht kompakt und W nicht konstant seien. Betrachten Sie folgende ungerade Operatoren auf $\Omega^\bullet(X)$ aufgefasst als Supervektorraum: $Q_1 = -i(\partial + \frac{i}{2}\partial W \wedge) : \Omega^\bullet(X) \to \Omega^\bullet(X)$ und $Q_2 = -i(\bar{\partial} - \frac{i}{2}\partial W \wedge) : \Omega^\bullet(X) \to \Omega^\bullet(X)$. Um die adjungierten Operatoren Q_1^* und Q_2^* definieren zu können, zeigen Sie dass gilt: $iQ_1 = \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}W}\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\frac{i}{2}W} - \bar{\partial}$ und $iQ_2 = \mathrm{e}^{\frac{i}{2}W}\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}W} - \partial$. Zeigen Sie dann, dass gilt:

    $$[Q_1, Q_1^*] = [Q_2, Q_2^*] = H, \quad Q_1^2 = 0, \quad Q_2^2 = 0, \quad [Q_1, Q_2] = 0,$$

    wobei [,] die Super–Lieklammer ist. Bestimmen Sie H. Für welche Punkte von X sind die Eigenwerte von H minimal ?

(c) (1 Punkt) Wählen Sie lokale Koordinaten auf X und betrachten Sie die beiden Operatoren $F_V = \sum_{k=1}^n \left(\mathrm{d}z^{\bar{k}} \wedge i_{\bar{\partial}_{\bar{k}}} - \mathrm{d}z^k \wedge i_{\partial_k} \right)$ und $F_A = \sum_{k=1}^n \left(\mathrm{d}z^{\bar{k}} \wedge i_{\bar{\partial}_{\bar{k}}} + \mathrm{d}z^k \wedge i_{\partial_k} \right)$ auf $\Omega^\bullet(X)$. Hier bezeichnet $i_X : \Omega^p(X) \to \Omega^{p-1}(X)$ die innere Ableitung, welche für $\alpha \in \Omega^p(X)$ und $X, X_1, \ldots, X_{p-1} \in \mathcal{X}(X)$ durch $i_X(\alpha)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_{p-1})$ definiert ist. Bestimmen Sie die Kommutatorrelationen mit $H, Q_1, Q_2, Q_1^*, Q_2^*$ und untereinander.

Abgabetermin: Donnerstag, 18. 12. 2008 um 14:00 Uhr.