Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
MMath. Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Komplexe Geometrie
WS 08/09

Übungsblatt 6

21. (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt und die duale Abbildung die Menge $\mathrm{Pic}(X)$ der Isomorphismenklassen von holomorphen Geradenbündeln auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X mit der Struktur einer abelschen Gruppe versehen.

    (b) (2 Punkte) Es sei $L \in \mathrm{Pic}(X)$, $0 \neq s \in H^0(X, L)$ und $Y = \{s = 0\} \subset X$. Zeigen Sie, dass für die Garbe $\mathcal{I}_Y$ aus Aufgabe 19(b) in diesem Fall gilt: $\mathcal{I}_Y \cong \mathcal{H}^0(X, L^{-1})$, wobei $\mathcal{H}^0(X, E)$ die Garbe der holomorphen Schnitte eines Vektorbündels E bezeichne.

22. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$0 \to \Omega^p_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}(-p)^{\oplus\binom{n+1}{p}} \to \Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

    exakt ist.

23. (4 Punkte) Die komplexe Fläche $\Sigma_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ heisst $n$te Hirzebruch–Fläche. Zeigen Sie, dass Σ_n isomorph zur Hyperfläche $Y = \{x_0^n y_1 - x_1^n y_2 = 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ ist, wobei $(x_0 : x_1)$ und $(y_0 : y_1 : y_2)$ die homogenen Koordinaten von $\mathbb{P}^1$ bzw. $\mathbb{P}^2$ bezeichnen.

24. Es sei $Y \subset X$ eine glatte Hyperfläche in einer n–dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit und α ein meromorpher Schnitt von K_X mit höchstens einfachen Polen entlang Y. Lokal können wir α schreiben als $\alpha = h\,\frac{\mathrm{d}z_1}{z_1} \wedge \mathrm{d}z_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n$, wobei $Y = \{z_1 = 0\}$ sein soll. Wir definieren das Residuum von α durch $\mathrm{Res}_Y(\alpha) = h\,\mathrm{d}z_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n|_Y$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Res}_Y(\alpha)$ wohldefiniert ist, und dass es ein Element aus $\mathrm{H}^0(Y, K_Y)$ ist.

    (b) (1 Punkt) Fassen Sie α als Element aus $\mathrm{H}^0(X, K_X \otimes \mathcal{O}(Y))$ auf und vergleichen Sie die Definition des Residuums mit der Adjunktionsformel $K_Y \cong (K_X \otimes \mathcal{O}(Y))\,|_Y$.

(c) (2 Punkte) Betrachten Sie eine glatte Hyperfläche $Y \subset \mathbb{P}^n$ definiert durch ein homogenes Polynom $f \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(n+1))$. Zeigen Sie, dass $\alpha = \sum_{i=0}^n (-1)^i z_i f^{-1} \mathrm{d}z_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}z_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n$ ein meromorpher Schnitt von $K_{\mathbb{P}^n}$ mit einfachen Polen entlang Y ist. Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{Res}_Y(\alpha) \in \mathrm{H}^0(Y, K_Y)$ eine holomorphe Volumenform auf Y, d.h. einen trivialisierenden Schnitt von K_Y definiert.

Abgabetermin: Donnerstag, 4. 12. 2008 um 14:00 Uhr.