

Übungsblatt 5

17. (4 Punkte) Es sei $\{(U_i, \phi_i)\}$ ein Atlas einer komplexen Mannigfaltigkeit X . Benutzen Sie die Beschreibung des holomorphen Tangentialbündels $\mathcal{T}_X$ durch Kozykel, um zu zeigen, dass die Faser $\mathcal{T}_X(x)$ für $x \in U_i \subset X$ mit $T_{\phi_i(x)}\phi_i(U_i) \cong T_{\phi_i(x)}^{1,0}\phi_i(U_i)$ identifiziert werden kann. Insbesondere können die Vektoren $\frac{\partial}{\partial z_j}$ als Basis von $\mathcal{T}_X(x)$ aufgefasst werden.
18. (4 Punkte) Es sei $Y \subset X$ eine k -dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit einer n -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X . Nach Definition 2.12 gibt es einen kompatiblen Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ von X . Zeigen Sie, dass die Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial z_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \in T_{\phi_i(x)}^{1,0}\phi_i(U_i)$ für $x \in Y \cap U_i$ in natürlicher Weise ein Basis für $\mathcal{N}_{Y/X}(x)$ bilden. Benutzen Sie dazu die Beschreibung des Normalenbündels durch Kozykel.
19. Es sei $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit, die lokal in $U \subset X$ durch holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_{n-k}$ gegeben sei (d.h. 0 ist ein regulärer Wert der Abbildung $(f_1, \dots, f_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ und Y ist dessen Urbild.).
- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_1, \dots, f_{n-k}$ für $x \in U \cap Y$ in natürlicher Weise eine Basis von $\mathcal{N}_{Y/X}(x)^*$ induzieren. Benutzen Sie dazu die Abbildung $\frac{\partial}{\partial z_i} \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial z_i}$ für $i = k+1, \dots, n$.
- (b) (2 Punkte) Es bezeichne $\mathcal{I}_Y(U)$ die Garbe aller holomorphen Funktionen auf $U \subset X$, die auf $Y \cap U$ verschwinden (dies definiert eine Garbe $\mathcal{I}_Y$). Zeigen Sie, dass die Einschränkung holomorpher Funktionen eine natürliche surjektive Abbildung $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ definiert, und dass die Sequenz
- $$0 \rightarrow \mathcal{I}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$
- exakt ist. Zeigen Sie damit und mit Hilfe von (a), dass es einen natürlichen Isomorphismus $\mathcal{N}_{Y/X}^* \cong \mathcal{I}_Y / \mathcal{I}_Y^2$ gibt.
20. (a) (2 Punkte) Es sei X der Quotient $\mathbb{C}^n / \mathbb{Z}^{2n}$, wobei $\mathbb{Z}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ die natürliche Inklusion ist. Zeigen Sie, dass X die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit gegeben werden kann.

- (b) (1 Punkt) Es sei V ein komplexer Vektorraum und $\Gamma \subset V$ ein Gitter, also eine freie, abelsche, diskrete Untergruppe der Ordnung $2n$. (Γ wird durch eine $\mathbb{R}$ -Basis frei erzeugt.) Zeigen Sie, dass $X = V/\Gamma$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.
- (c) (1 Punkt) Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbb{C}^n$ zwei Gitter. Wann sind $\mathbb{C}^n/\Gamma_1$ und $\mathbb{C}^n/\Gamma_2$ isomorph als komplexe Mannigfaltigkeiten? Geben Sie eine explizite Beschreibung im Fall $n = 1$.

Abgabetermin: Donnerstag, 27. 11. 2008 um 14:00 Uhr.