Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
MMath. Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Komplexe Geometrie
WS 08/09

Übungsblatt 4

13. Es seien E, F Vektorbündel über einer komplexen Mannigfaltigkeit X gegeben durch die Kozykeln $\{(U_i, \psi_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})\}$ bzw. $\{(U_i, \psi'_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r', \mathbb{C})\}$. Verifizieren Sie die folgenden Isomorphismen anhand der Kozykel:

    (a) (1 Punkt) Die direkte Summe $E \oplus F$ ist das holomorphe Vektorbündel über X, dessen Faser $(E \oplus F)(x) \cong E(x) \oplus F(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt, und durch den Kozykel $\psi_{ij} \oplus \psi'_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r + r', \mathbb{C})$ gegeben ist.

    (b) (1 Punkt) Das Tensorprodukt $E \otimes F$ ist das holomorphe Vektorbündel über X, dessen Faser $(E \otimes F)(x) \cong E(x) \otimes F(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt, und durch den Kozykel $\psi_{ij} \otimes \psi'_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r \cdot r', \mathbb{C})$ gegeben ist.

    (c) (1 Punkt) Das duale Bündel E^* ist das holomorphe Vektorbündel über X, dessen Faser $(E^*)(x) \cong (E(x))^*$ für alle $x \in X$ erfüllt, und durch den Kozykel $\left(\psi_{ij}^T\right)^{-1} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ gegeben ist.

    (d) (1 Punkt) Das Determinantenbündel $\det E = \bigwedge^r E$ ist das holomorphe Vektorbündel über X, dessen Faser $(\det E)(x) \cong \bigwedge^r(E(x))$ für alle $x \in X$ erfüllt, und durch den Kozykel $\det \psi_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ gegeben ist.

14. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass jede kurze exakte Sequenz von holomorphen Vektorbündeln $0 \to L \to E \to F \to 0$, wobei L ein Geradenbündel sei, eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \to L \otimes \bigwedge^{i-1} F \to \bigwedge^{i} E \to \bigwedge^{i} F \to 0$$

    für jedes $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ induziert.

15. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass es für jedes holomorphe Vektorbündel E vom Rang r eine nicht–ausgeartete Paarung

$$\bigwedge^{k} E \times \bigwedge^{r-k} E \to \det E$$

    gibt. Leiten Sie daraus die Existenz eines natürlichen Isomorphismus von holomorphen Vektorbündeln $\bigwedge^k E \cong \bigwedge^{r-k} E^* \otimes \det E$ ab.

16. (4 Punkte) Es sei L ein holomorphes Geradenbündel auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X. Zeigen Sie, dass L genau dann trivial ist, wenn L und sein Duales L^* nicht–triviale globale Schnitte besitzen. Konstruieren Sie dazu einen nicht–trivialen Schnitt von $\mathcal{O} \cong L \otimes L^*$ aus nicht–trivialen Schnitten von L und L^*.

Abgabetermin: Donnerstag, 20. 11. 2008 um 14:00 Uhr.