

Übungsblatt 2

5. (a) (2 Punkte) Es seien f und g differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{C}$. Beweisen Sie die Kettenregel $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}$ und ihr Analogon für $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $f \circ g$ holomorph ist, falls f und g holomorph sind.
- (b) (2 Punkte) Formulieren und beweisen Sie die Produktregel für $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Zeigen Sie, dass das Produkt $f \cdot g$ zweier holomorpher Funktionen f, g holomorph ist. Wann ist die Funktion $1/f$ holomorph?
6. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Weiter sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Die äussere Ableitung ist eine Abbildung $\mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)$, die auf Vektorfeldern $X_1, \dots, X_{k+1}$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j}^{k+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

- (a) (1 Punkt) Für $M = U$ stimmt diese Definition mit $d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ überein.
- (b) (1 Punkt) $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$, $\alpha \in \mathcal{A}^k(M), \beta \in \mathcal{A}^{k'}(M)$
- (c) (2 Punkte) $d \circ d = 0$.
7. (a) (2 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$. Zeigen Sie, dass $\overline{\partial \alpha} = \bar{\partial} \bar{\alpha}$. Zeigen Sie, dass daraus insbesondere folgt, dass eine reelle (p, p) -Form $\alpha \in \mathcal{A}^{p,p}(U) \cap \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2p}(U)$ genau dann ∂ -geschlossen (∂ -exakt) ist, wenn α $\bar{\partial}$ -geschlossen ($\bar{\partial}$ -exakt) ist.
- (b) (2 Punkte) Es sei $B \subset \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder und $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(B)$ eine d -geschlossene Form mit $p, q \geq 1$. Zeigen Sie mit Hilfe der Poincaré-Lemmas, dass es eine Form $\gamma \in \mathcal{A}^{p-1, q-1}(B)$ gibt, so dass $\partial \bar{\partial} \gamma = \alpha$.

8. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\omega = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$ eine Fundamentalform für die Standardmetrik auf $\mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie, dass diese Fundamentalform als $\omega = \frac{i}{2} \partial\bar{\partial}\phi$ für eine positive Funktion ϕ geschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Funktion ϕ .

Abgabetermin: Donnerstag, 6. 11. 2008 um 14:00 Uhr.