Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
MMath. Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Komplexe Geometrie
WS 08/09

Übungsblatt 11

41. Es seien E_1, E_2 und E komplexe Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M.

    (a) (1 Punkt) Es sei $E = E_1 \oplus E_2$ versehen mit dem von E_1 und E_2 induzierten Zusammenhang und der dazugehörigen Krümmung (cf. Aufgabe 38a)). Zeigen Sie die Produktformel von Whitney: $\mathrm{c}(E, \nabla) = \mathrm{c}(E_1, \nabla_1)\mathrm{c}(E_2, \nabla_2)$. Zeigen Sie ebenfalls, dass $\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}(E_1) + \mathrm{ch}(E_2)$.

    (b) (1 Punkt) Es sei $E = E_1 \otimes E_2$ versehen mit dem von E_1 und E_2 induzierten Zusammenhang und der dazugehörigen Krümmung (cf. Aufgabe 38b)). Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}(E_1)\mathrm{ch}(E_2)$.

    (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für das duale Bündel E^* mit dem von E induzierten Zusammenhang und der dazugehörigen Krümmung (cf. Aufgabe 38c)) gilt: $\mathrm{c}_k(E^*, \nabla^*) = (-1)^k \mathrm{c}_k(E, \nabla)$.

    (d) (1 Punkt) Es seien $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und E ein Vektorbündel auf N. Es sei f^*E versehen mit dem Pullback–Zusammenhang und der dazugehörigen Krümmung (cf. Aufgabe 38 d)). Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{c}_k(f^*E, f^*\nabla) = f^*\mathrm{c}_k(E, \nabla)$.

42. (a) (3 Punkte) Es seien $x_1, \ldots, x_n$ beliebige Variablen, und $p_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^k$, $k \geq 1$, die Summe der k-ten Potenzen. Es sei $e_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k \geq 0$, das k-te elementare symmetrische Polynom, d.h. die Summe aller verschiedenen Produkte in k Variablen. Beweisen Sie die Formel von Newton:

    $$k\, e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i e_{k-i}(x_1, \ldots, x_n) p_i(x_1, \ldots, x_n)$$

    (b) (1 Punkt) Benutzen Sie die Formel von Newton um den i-ten Chern-charakter $\mathrm{ch}_i(E)$ durch die Chernklassen $\mathrm{c}_k(E)$ auszudrücken.

43. (a) (2 Punkte) Es seien E ein Vektorbündel vom Rang r und L ein Geradenbündel. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{c}_i(E \otimes L) = \sum_{j=0}^{i} \binom{r-j}{i-j} \mathrm{c}_j(E)\mathrm{c}_1(L)^{j-i}$$

(b) Es seien $\gamma_i = c_1(L_i), i = 1, \ldots, r$ die Chernklassen in der Zerlegung eines Vektorbündels E gemäss dem "splitting principle", d.h. $\mathrm{c}(E) = \prod_{i=1}^{r}(1+\gamma_i)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{c}\left(\bigwedge^p E\right) = \prod_{i_1<\cdots<i_p} (1 + \gamma_{i_1} + \cdots + \gamma_{i_p})$$

Bestimmen Sie $\mathrm{c}(\det E)$.

44. (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathrm{td}(E_1 \oplus E_2) = \mathrm{td}(E_1)\mathrm{td}(E_2)$.

(b) (2 Punkte) Es sei E ein Vektorbündel vom Rang r. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \mathrm{ch}(\bigwedge^i E^*) = \mathrm{c}_r(E)\,\mathrm{td}(E)^{-1}$$

Abgabetermin: Donnerstag, 29. 1. 2009 um 14:00 Uhr.