Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lösungsvorschläge für Blatt 9

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum, $I = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Indexmenge und $(v_i)_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie in V. Seien $\alpha_i \in K$, $i \in I$, beliebig und

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,.$$

Zeigen Sie:

Die Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Vektoren $x_i \in V$, die definiert ist durch $x_i := v_i - w$, $i \in I$, ist genau dann linear abhängig, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \,.$$

„ $\Longrightarrow$ " Seien also x_i eine linear abhängige Familie von Vektoren in V. Dann gibt es $\lambda_i \in K$ so dass für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $\lambda_j \neq 0$ und

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(v_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) v_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) v_i \qquad (1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) \right) v_i \,. \end{aligned}$$

Da die Familie der $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist, folgt

$$\lambda_i - \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) = 0$$

für alle $i \in I$, damit aber auch

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) = 0 \,,$$

und daher gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right) = 0 \,.$$

Also gilt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ oder $1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. Aber wenn $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, dann gilt mit (1)

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

und, da v_i linear unabhängig sind, $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$, im Widerspruch zur Vorraussetzung $\lambda_j \neq 0$. Also gilt $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ und daher muß $1 = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ gelten.

„ $\Longleftarrow$ " Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i &= \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i,k=1}^n \alpha_k \alpha_i v_i \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)}_{=1} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

und da $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ gilt, kann nicht $\alpha_i = 0$ für alle $i \in I$ sein. Damit sind die $(x_i)_{i \in I}$ linear abhängig.