Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 9

(Unterräume, Erzeugendensystem, Lineare Unabhängigkeit)

Abgabe: bis Freitag, den 21. 12 ., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Gegeben seien die folgenden Vektoren in $\mathbb{C}^2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 .$$

1. Man betrachte $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(v_i)_{i\in\{1,2,3,4\}}$ eine linear abhängige Familie ist.
2. Man betrachte $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(v_i)_{i\in\{1,2,3,4\}}$ eine linear unabhängige Familie ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Ist U ein Unterraum von V? (Warum oder warum nicht?)

1. $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}, \quad V = \mathbb{R}^3$
2. $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 = 0\}, \quad V = \mathbb{R}^2$
3. $U = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid a_i \neq 0$ für höchstens endlich viele i $\in \mathbb{N}\}$,
   $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$
4. $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\}, \quad V =Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

1. Ist $v_3 \in \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$?
2. Sei $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 4y - 5z = 0\}$.

   Zeigen Sie: $U = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum, $I = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Indexmenge und $(v_i)_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie in V. Seien $\alpha_i \in K$, $i \in I$, beliebig und

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,.$$

Zeigen Sie:

Die Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Vektoren $x_i \in V$, die definiert ist durch $x_i := v_i - w$, $i \in I$, ist genau dann linear abhängig, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \,.$$