Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Lösungshinweise zur 2. Aufgabe (Blatt 8)

Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeigen Sie: Jedes reelle Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $n = \deg P \geq 1$ hat eine Zerlegung

$$P(x) = c(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) \cdot Q_1(x) \cdot \ldots \cdot Q_l(x)\,, \quad 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq l \leq \frac{n}{2}\,,$$

mit $c, x_i \in \mathbb{R}, c \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, sowie $Q_j \in \mathbb{R}[x], j = 1, \ldots, l$, sind reelle Polynome vom Grad $\deg Q_j = 2$ mit $Q_i(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass n komplexe Nullstellen $b_1, \ldots, b_n$ (nicht notwendig $b_i \neq b_j, i \neq j$) von P existieren, so dass

$$P(x) = a(x - b_1) \cdot \ldots \cdot (x - b_n)\,,$$

mit $a = a_n \in \mathbb{R}$ der höchste Koeffzient des Polynoms $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.
Seien $x_i, i = 1, \ldots, k$ die reellen Nullstellen, und $z_i, i = 1, \ldots, n-k$, die Nullstellen mit $z_i \in \mathbb{C}$ aber $z_i \notin \mathbb{R}$, also erhalten wir

$$P(x) = a(x - x_1) \cdot \ldots (x - x_k) \cdot (x - z_1) \cdot \ldots \cdot (x - z_{n-k})\,.$$

Aus der Übungsgruppe wissen wir, dass mit z_i auch $\bar{z}_i$ eine Nullstelle ist. Das heißt, dass $n - k = 2l, l \in \mathbb{N}$, gerade ist, und ohne Einschränkung können wir annehmen (nach eventueller Umbenennung der Indices), dass

$$z_{i+1} = \bar{z}_i\,.$$

Sei $Q_i(x) = (x - z_i)(x - z_{i+1})$, dann ist also

$$P(x) = a(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) Q_1(x) \cdot \ldots \cdot Q_l(x)\,.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Polynome $Q_i \in \mathbb{R}[x]$ sind und dass $\deg Q_i = 2$. Wir berechnen:

$$Q_i(x) = (x - z_i)(x - z_{i+1}) = (x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 - 2\mathrm{Re}\,(z_i) x + |z_i|^2,$$

also hat das Polynom zweiten Grades $Q_i(x) = x^2 + q_1 x + q_0$ nur reelle Koeffizienten $q_0 = |z_i|^2 \in \mathbb{R}, q_1 = -2\mathrm{Re}\,(z_i) \in \mathbb{R}$.

Insbesondere: Jedes reelle Polynom mit ungradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Hat ein relles Polynom P keine reelle Nullstelle, dann ist

$$P(x) = Q_1(x) \cdot \ldots \cdot Q_l(x)$$

mit $Q_i \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg Q_i = 2$. Dann ist also der Grad von P gegeben durch $\deg P = 2l$, also gerade. Damit hat jedes Polynom mit $\deg P = 2l + 1$ eine reelle Nullstelle.