Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 8

(Polynome, Vektorräume)

Abgabe: bis Freitag, den 15. 12 ., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie:

1. $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$.
2. $\mathbb{C}[x]$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeigen Sie: Jedes reelle Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $n = \deg P \geq 1$ hat eine Zerlegung

$$P(x) = c(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) \cdot Q_1(x) \cdot \ldots \cdot Q_l(x)\,, \quad 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq l \leq \frac{n}{2}\,,$$

mit $c, x_i \in \mathbb{R}, c \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, sowie $Q_j \in \mathbb{R}[x], j = 1, \ldots, l$, sind reelle Polynome vom Grad $\deg Q_j = 2$ mit $Q_i(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Insbesondere: Jedes reelle Polynom mit ungradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

(Hinweis: Falls $P(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$ gilt, dann ist auch $P(\bar{z}) = 0$).

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $P \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom vom Grad 3 mit Nullstellen $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Gilt $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 1$ und $||b_i|| = 1, i = 1, 2, 3$, so gibt es ein $k \in \{1, 2, 3\}$ mit $b_k = 1$.
(Hinweis: Aufgabe 2)

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei R kommutativer Ring mit 1, so dass jedes Polynom $p \in R[x]$ vom Grad $n \geq 1$ mindestens eine Nullstelle hat. Zeigen Sie: R ist ein Körper.

****
Die Bearbeitung der Zusatzaufgaben ist freiwillig. Die Punkte, die man auf Zusatzaufgaben erreicht, werden gutgeschrieben und können fehlende Punkte in der Gesamtwertung ersetzen.

Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte). Sei $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ die komplexe Konjugation und

$$\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}\,.$$

Zeigen Sie: Ist $\varphi : \mathbb{Q}(i) \to \mathbb{Q}(i)$ ein Körperisomorphismus, dann ist $\varphi = \mathrm{id}$ oder $\varphi = \kappa$.