Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Lösungshinweise zur 1. Aufgabe und zum ersten Teil der 2. Aufgabe

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien K und L Körper und $\varphi : K \to L$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass φ injektiv ist, falls φ nicht der Nullhomomorphismus ist.

Angenommen, es gilt $\varphi(1) = 0$. Dann ist für alle $x \in K$:

$$\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) \overset{Ringhomom}{=} \varphi(x) \cdot \varphi(1) = 0\,,$$

also ist φ der Nullhomomorphismus.

Ist also φ nicht der Nullhomomorphismus, dann ist $\varphi(1) \neq 0$. Dann gibt es das Inverse $(\varphi(1))^{-1} \in L$ und

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) \overset{Ringhomom}{=} \varphi(1) \cdot \varphi(1)$$

impliziert

$$1 = (\varphi(1))^{-1}\varphi(1) = (\varphi(1))^{-1}(\varphi(1) \cdot \varphi(1)) \overset{M1}{=} \underbrace{((\varphi(1))^{-1}\varphi(1))}_{=1} \cdot \varphi(1) = \varphi(1)\,.$$

Damit ist φ ein unitärer Ringhomomorphismus zwischen Körpern und also, siehe Vorlesung, injektiv.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über K. Durch

$$(g_1, h_1) \sim (g_2, h_2) \iff g_1 \cdot h_2 = g_2 \cdot h_1\,.$$

wird eine Äquivalenzrelation auf $K[x] \times (K[x] \setminus \{0\})$ definiert (dies muß nicht bewiesen werden). Sei $K(x) = \{[(g, h)] \mid (g, h) \in K[x] \times (K[x] \setminus \{0\})\}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$, wir schreiben die Äquivalenzklasse von (g, h) auch kurz als $[(g, h)] = \frac{g}{h}$.

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$

$$\frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} = \frac{g_1 \cdot h_2 + g_2 \cdot h_1}{h_1 \cdot h_2}, \qquad \frac{g_1}{h_1} \cdot \frac{g_2}{h_2} = \frac{g_1 \cdot g_2}{h_1 \cdot h_2}$$

auf $K(x)$ wohldefiniert sind.

Sei $(g_i, h_i) \sim (\tilde{g}_i, \tilde{h}_i)$, $i = 1, 2$, d.h.

$$g_i \cdot \tilde{h}_i = \tilde{g}_i \cdot h_i, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

+ ist wohldefiniert: Zu zeigen ist, dass

$$\frac{g_1 \cdot h_2 + g_2 \cdot h_1}{h_1 \cdot h_2} = \frac{\tilde{g}_1 \cdot \tilde{h}_2 + \tilde{g}_2 \cdot \tilde{h}_1}{\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2}\,,$$

also

$$(g_1 \cdot h_2 + g_2 \cdot h_1, h_1 \cdot h_2) \sim (\tilde{g}_1 \cdot \tilde{h}_2 + \tilde{g}_2 \cdot \tilde{h}_1, \tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2)\,.$$

Dies ist nach Definition der Äquivalenzrelation genau dann der Fall, wenn

$$(g_1 \cdot h_2 + g_2 \cdot h_1) \cdot (\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2) = (\tilde{g}_1 \cdot \tilde{h}_2 + \tilde{g}_2 \cdot \tilde{h}_1) \cdot (h_1 \cdot h_2)\,.$$

$(K[x], +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1 (vgl. Vorlesung), also gelten in $K[x]$ die Axiome $M1, M4, D1, D2$:

$$\begin{aligned} (g_1 \cdot h_2 + g_2 \cdot h_1) \cdot (\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2) &\overset{M1,M4,D2}{=} (g_1 \cdot \tilde{h}_1) \cdot (h_2 \cdot \tilde{h}_2) + (g_2 \cdot \tilde{h}_2) \cdot (h_1 \cdot \tilde{h}_1) \\ &\overset{(1)}{=} (\tilde{g}_1 \cdot h_1) \cdot (h_2 \cdot \tilde{h}_2) + (\tilde{g}_2 \cdot h_2) \cdot (h_1 \cdot \tilde{h}_1) \\ &\overset{M1,M4,D2}{=} (\tilde{g}_1 \cdot \tilde{h}_2 + \tilde{g}_2 \cdot \tilde{h}_1) \cdot (h_1 \cdot h_2)\,. \end{aligned}$$

$\cdot$ **ist wohldefiniert:** Zu zeigen:

$$\frac{g_1 \cdot g_2}{h_1 \cdot h_2} = \frac{\tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_2}{\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2}$$

d.h. zu zeigen:

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot (\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2) = (\tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_2) \cdot (h_1 \cdot h_2)\,.$$

Aber es gilt

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot (\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2) \overset{M1,M4}{=} (g_1 \cdot \tilde{h}_1) \cdot (g_2 \cdot \tilde{h}_2) \overset{(1)}{=} (\tilde{g}_1 \cdot h_1) \cdot (\tilde{g}_2 \cdot h_2) \overset{M1,M4}{=} (\tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_2) \cdot (h_1 \cdot h_2).$$