Universität Augsburg
Institut für
Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

# Lineare Algebra I, Blatt 7

(Ringhomomorphismen, Polynomringe)

Abgabe: bis Freitag, den 8.12., 12:00 Uhr.

**Aufgabe 1 (4 Punkte).** Seien $K$ und $L$ Körper und $\varphi : K \to L$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $\varphi$ injektiv ist, falls $\varphi$ nicht der Nullhomomorphismus ist.

**Aufgabe 2 (4 Punkte).** Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über $K$. Durch

$$(g_1, h_1) \sim (g_2, h_2) \iff g_1 \cdot h_2 = g_2 \cdot h_1 .$$

wird eine Äquivalenzrelation auf $K[x] \times (K[x] \setminus \{0\})$ definiert (dies muß nicht bewiesen werden). Sei $K(x) = \{[(g,h)] \mid (g,h) \in K[x] \times (K[x] \setminus \{0\})\}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$, wir schreiben die Äquivalenzklasse von $(g,h)$ auch kurz als $[(g,h)] = \frac{g}{h}$.

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$

$$\frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} = \frac{g_1 \cdot h_2 + g_2 \cdot h_1}{h_1 \cdot h_2}, \qquad \frac{g_1}{h_1} \cdot \frac{g_2}{h_2} = \frac{g_1 \cdot g_2}{h_1 \cdot h_2}$$

   auf $K(x)$ wohldefiniert sind.

2. Zeigen Sie, dass $(K(x), +, \cdot)$ ein Körper ist. ($K(x)$ heißt der *Körper der rationalen Funktionen über* K)

**Aufgabe 3 (4 Punkte).** Sei (vgl. Blatt 5, 1. Aufgabe)

$$\mathcal{D}_3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3, \quad y_j \in \mathbb{R}, j = 2,3, \quad z_3 \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}.$$

Definiere auf $\mathcal{D}_3$ eine Addition $+$ durch komponentenweise Addition sowie eine Multiplikation $\cdot$ durch

$$D \cdot \tilde{D} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 \\ 0 & \tilde{y}_2 & \tilde{y}_3 \\ 0 & 0 & \tilde{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\tilde{x}_1 & x_1\tilde{x}_2 + x_2\tilde{y}_2 & x_1\tilde{x}_3 + x_2\tilde{y}_3 + x_3\tilde{z}_3 \\ 0 & y_2\tilde{y}_2 & y_2\tilde{y}_3 + y_3\tilde{z}_3 \\ 0 & 0 & z_3\tilde{z}_3 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie: $(\mathcal{D}_3, +, \cdot)$ ist ein Ring.
2. Ist $\mathcal{D}_3$ ein kommutativer Ring?
3. Ist $\mathcal{D}_3$ ein Ring mit Eins?

*bitte wenden!*

**Aufgabe 4 (4 Punkte).** Sei $\mathcal{D}_3$ der Ring aus Aufgabe 3. Ferner sei $\mathbb{R}^3$ versehen mit der komponentenweise Addition und Multiplikation. Dann ist $\mathbb{R}^3$ ein Ring (siehe Übungsgruppe). Definiere

$$\alpha : \mathcal{D}_3 \to \mathbb{R}^3, \quad D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \mapsto \alpha(D) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass $\alpha$ ein Ringhomomorphismus ist.
2. Ist $\alpha$ injektiv?
3. Ist $\alpha$ surjektiv?

************************************************************************************

*Die Bearbeitung der Zusatzaufgaben ist freiwillig. Die Punkte, die man auf Zusatzaufgaben erreicht, werden gutgeschrieben und können fehlende Punkte in der Gesamtwertung ersetzen.*

**Zusatzaufgabe 1** (4 Punkte)**.** Sei $K$ ein Körper mit Charakteristik $k = \mathrm{char}(K) \neq 0$. Zeigen Sie: $k$ ist eine Primzahl.