Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 6

(Körper)

Abgabe: bis Freitag, den 1. 12 ., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $(R, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0. Sei $\cdot$ eine weitere Verknüpfung auf R, so dass:

- das Assoziativgesetz für die Verknüpfung $\cdot$ gilt.
- $1 \in R - \{0\}$ existiert mit $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ für alle $x \in R$.
- $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in R$.
- $x \cdot y = 0$ für $x, y \in R$ impliziert, dass $x = 0$ oder $y = 0$ ("Nullteilerfreiheit").
- $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ für alle $x, y, z \in R$.

Sei außerdem $|R| = n < \infty$.
Zeigen Sie: R ist ein Körper.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $x \in R - \{0\}$ gilt: Falls y_1, $y_2 \in R$ und $x \cdot y_1 = x \cdot y_2$ gilt, dann folgt $y_1 = y_2$.)

Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeigen Sie: Für jede Primzahl p ist $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper.
(Hinweis: Aufgabe 1)

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $K = \{x + yi\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$.
Zeigen Sie: K ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Es sei K ein Körper, G die von 1 erzeugte Untergruppe der additiven Gruppe $(K, +)$ und $Q = \{ab^{-1} \mid a, b \in G, b \neq 0\}$.
Zeigen Sie:

- Q ist ein Unterkörper von K.
- Q ist der kleinste Unterkörper von K,

  mit anderen Worten, zeigen Sie: jeder Unterkörper von K enthält Q.