Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 5

(Symmetrische Gruppen)

Abgabe: bis Freitag, den 24. 11 ., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei

$$\mathcal{M} = \{A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \mid x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}.$$

Für $A \in \mathcal{M}$ bezeichne $A_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ die i-te Spalte von $A = (A_1, A_2, A_3)$. Weiter definiere die Abbildung $\Delta : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ durch

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - z_1y_2x_3 - z_2y_3x_1 - z_3y_1x_2 .$$

Zeigen Sie:

Für alle $A \in \mathcal{M}$ und alle $\sigma \in S_3$ gilt

$$\Delta\big((A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)})\big) = \operatorname{sign}(\sigma)\Delta(A) .$$

(Hinweis: Man überprüfe die Aussage für Transpositionen. Warum genügt dies?)

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $\sigma_i = (i, i+1) \in S_k$ eine elementare Transposition. Zeigen Sie:

1. $\sigma_i^2 = \mathrm{id}$ für alle $i = 1, \ldots, k-1$.
2. $\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, k-2$.
3. $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$ für alle $1 \leq i < j \leq k-1$, $j \neq i+1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Die Menge $A_n \subset S_n$ der geraden Permutationen ist eine Untergruppe von S_n.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Zeigen Sie: Die Menge $A_5 \subset S_5$ der geraden Permutationen hat nur Elemente der Ordnung 1,2,3,5.