Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Lösungshinweise zur 1. und 2. Aufgabe

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie: Die Gruppe der Rotationssymmetrien des Tetraeders ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4. (Hinweis: betrachten Sie die Ecken des Tetraeders unter einer Rotationssymmetrie).

Sei $G = \{g \mid g \text{ ist Rotationssymmetrie des Tetraeders}\}$ und $P_1, \ldots, P_4$ die Ecken des Tetraeders. Für $g \in G$ definiere eine Permutation $\varphi(g) = \sigma \in S_4$ durch

$$g(P_i) = P_{\sigma(i)}, \quad i = 1, \ldots, 4\,.$$

Die Abbildung $\varphi : G \to S_4$ ist ein Gruppenhomomorphismus, da

$$P_{\varphi(g\circ\tilde{g})(i)} = g \circ \tilde{g}(P_i) = g(\tilde{g}(P_i)) = g(P_{\varphi(\tilde{g})(i)}) = P_{\varphi(g)(\varphi(\tilde{g})(i))}, \quad i = 1, \ldots, 4,$$

und daher

$$\varphi(g \circ \tilde{g}) = \varphi(g) \circ \varphi(\tilde{g})\,.$$

Für $g, \tilde{g} \in G$ impliziert $\varphi(g) = \varphi(\tilde{g})$, dass

$$g(P_i) = \tilde{g}(P_i), \quad i = 1, \ldots, 4\,.$$

Da zwei Rotationssymmetrien gleich sind, wenn sie die Ecken auf gleiche Weise abbilden, folgt $g = \tilde{g}$. Daher ist φ injektiv.
Sei $H = \varphi(G) \subset S_4$, dann gilt:

$$h = \varphi(g), \tilde{h} = \varphi(\tilde{g}) \in H \implies h \circ \tilde{h} = \varphi(g) \circ \varphi(\tilde{g}) = \varphi(g \circ \tilde{g}) \in \varphi(G) = H\,,$$

und

$$h = \varphi(g) \in H \implies h^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in \varphi(G) = H,$$

denn

$$\varphi(g) \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g \circ g^{-1}) = \varphi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}\,.$$

Damit ist $\varphi : G \to H$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus, und G isomorph zu einer Untergruppe $H \subset S_4$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $\sigma \in S_n$ ein Zykel der Länge k. Zeigen Sie: Die Untergruppe $H \subset S_n$, die von σ erzeugt wird, ist isomorph zur zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ der Ordnung k.

Mit Hausaufgabe 4, Blatt 3, reicht es zu zeigen, dass die von σ erzeugte Untergruppe $H \subset S_n$ die Ordnung k hat. Wir schreiben

$$\sigma = (i_1 \ldots i_k)$$

mit $i_j \in \{1, \ldots, n\}, j = 1, \ldots, k$. Dann ist

$$\sigma^m(j) = j, \quad j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}, m \in \mathbb{Z}.$$

Ausserdem ist

$$\sigma^m(i_j) = i_{(j+m) \mod k}, \quad j = 1, \ldots, k\,.$$

Damit ist $\sigma^k = \mathrm{id}$ und $\sigma^m \neq \mathrm{id}$ für $m < k$ und also

$$|H| = k\,.$$