Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 4

(Symmetrische Gruppen)

Abgabe: bis Freitag, den 17. 11., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie: Die Gruppe der Rotationssymmetrien des Tetraeders ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4. (Hinweis: betrachten Sie die Ecken des Tetraeders unter einer Rotationssymmetrie).

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $\sigma \in S_n$ ein Zykel der Länge k. Zeigen Sie: Die Untergruppe $H \subset S_n$, die von σ erzeugt wird, ist isomorph zur zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ der Ordnung k.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Welche Permutationen der ersten acht natürlichen Zahlen lassen sich durch Hintereinanderausführung der Grundoperationen

$$\pi_1 = (2,8)(4,6)\,, \quad \pi_2 = (3,8)(4,7)\,, \quad \pi_3 = (5,8)(6,7)$$

erzeugen? Wieviele der Grundoperationen müssen maximal hintereinandergeschaltet werden, um jede mögliche Permutation zu erzeugen?

(Dies entspricht den möglichen Stellungen eines vereinfachten Zauberwürfels (Rubik's Cube) mit nur vier Segmenten je Seite, bei dem nur Halbdrehungen durchgeführt werden, und der Anzahl von Zügen, die zum idealen Lösen maximal benötigt werden.)

Aufgabe 4 (4 Punkte). Zeigen Sie: für jedes $\sigma \in S_n$ gilt

$$\operatorname{sign} \sigma = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}\,.$$

(Hinweis: Ordnen Sie die Faktoren in Paare mit bzw. ohne Fehlstand).

bitte wenden!

http://www.bennynero.com/anagrammap.html