



Lineare Algebra I, Blatt 3

(Homomorphismus, Isomorphismus, zyklische Gruppen)

Abgabe: bis Freitag, den 10.11., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$, gegeben durch $\varphi(n) = [n]$. Zeigen Sie:

- φ ist ein Gruppenhomomorphismus.
- φ ist surjektiv.
- φ ist kein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ und \oplus die Verknüpfung

$$(x + iy) \oplus (\tilde{x} + i\tilde{y}) = (x + \tilde{x}) + i(y + \tilde{y}).$$

Dann ist (\mathbb{C}, \oplus) eine Gruppe (dies muß nicht gezeigt werden!).

Zeigen Sie: (\mathbb{C}, \oplus) ist isomorph zu $(\mathbb{R}^2, +)$, wobei $+$ die übliche Addition in \mathbb{R}^2 bezeichnet.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei (G, \circ) eine Gruppe und $A \subset G$. Sei

$$\hat{A} = \{a_1 \circ \dots \circ a_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a_i \in A \text{ oder } a_i^{-1} \in A \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}.$$

Zeigen Sie:

- \hat{A} ist eine Gruppe.
- Ist $H \subset G$ eine Untergruppe von G mit $A \subset H$ dann gilt auch $\hat{A} \subset H$.

Das heißt, \hat{A} ist die kleinste Untergruppe von G , die A enthält. Man nennt \hat{A} die von A erzeugte Untergruppe.

Wie sieht \hat{A} aus, wenn A einelementig ist?

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei G eine Gruppe und $A = \{g\}$ mit $g \in G$. Zeigen Sie: wird G von A erzeugt, d.h. $G = \hat{A}$, dann ist G isomorph zu \mathbb{Z} oder $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ mit $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$.

bitte wenden!

Aus Goethes Faust:

Du must verstehn!
Aus Eins mach Zehn,
Und Zwei laß gehn,
Und Drei mach gleich,
So bist du reich.
Verlier die Vier!

Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex',
Mach Sieben und Acht,
So ist's vollbracht:
Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins,
Das ist das Hexen-Einmaleins.

Faust: Mich dünkt, die Alte spricht im Fieber... und Mephisto antwortet: Das ist noch lange nicht vorüber.

Zahlreiche Mathematiker und Mystiker haben sich an eine Interpretation dieses Spruchs gewagt und mehr oder weniger plausible Lösungen entdeckt und veröffentlicht. Zum Teil wird auf Untersuchungen des Mathematikers und Naturwissenschaftlers Gottfried Wilhelm Leibniz verwiesen, die mit binären Zahlensystemen zusammenhängen sollen und auf das Spielprinzip der Türme von Hanoi und dem Pascalschen Dreieck verweisen. Andere entdecken dahinter, so man es nur zu lösen verstünde, die sieben Schritte der wahren Initiation in die Geheimnisse der Magie und die Realitäten dieser Welt.

Die meisten Interpretationen deuten indes auf ein Magisches Quadrat mit der Quersumme 15 hin...