Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Lösung zur 3. Aufgabe

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $\mathbb{R}_{>k} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > k\}$, und definiere die Verknüpfung $*$ durch

$$x * y = xy - x - y + 2$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

- **Ist $G = (\mathbb{R}_{>1}, *)$ eine Gruppe?**
  Da für $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ gilt, daß

  $$x > 1 \overset{y-1>0}{\Longrightarrow} x(y-1) > y-1 \implies x * y = xy - x - y + 2 > 1\,,$$

  d.h. $x * y \in G$ für alle $x, y \in G$, ist G abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung $*$.

  Für $x, y, z \in \mathbb{R}_{>1}$ gilt (mit der Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$ und der Kommutativität der Addition in $\mathbb{R}$):

  $$(x*y)*z = (xy-x-y+2)z - (xy-x-y+2) - z + 2 = xyz - xz - yz - xy + z + x + y + 2$$

  und

  $$x*(y*z) = x(yz-y-z+2) - x - (yz-y-z+2) + 2 = xyz - xz - yz - xy + z + x + y + 2$$

  Damit gilt das Assoziativgesetz.

  Da $2 \in \mathbb{R}_{>1}$ und für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$ gilt:

  $$2 * x = 2x - 2 - x + 2 = x\,,$$

  ist $e = 2$ das neutrale Element von G.

  Sei $x \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann ist $\frac{x}{x-1} \in \mathbb{R}_{>1}$, da $x > x-1$ und $x - 1 > 0$ und daher $\frac{x}{x-1} > 1$. Außerdem gilt:

  $$\frac{x}{x-1} * x = \frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - x + 2 = \frac{x^2 - x - x(x-1)}{x-1} + 2 = 2\,.$$

  Daher ist $\frac{x}{x-1}$ das inverse Element zu x.

  Damit ist G eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung $*$.

  Ist G abelsch?
  Ja, G ist abelsch, da für $x, y \in G$ (wieder Asso/Kommu der Verknüpfungen in $\mathbb{R}$):

  $$x * y = xy - x - y + 2 = yx - y - x + 2 = y * x$$

- **Ist $H = (\mathbb{R}_{>3}, *)$ eine Gruppe?** Nein: Wäre H eine Gruppe, dann müsste es ein $e \in H$ geben mit
$$e * x = x$$
für alle $x \in H$. Aber
$$x = e * x \implies x = ex - x - e + 2 \implies 2(x-1) = e(x-1) \overset{x>1}{\implies} 2 = e\,.$$
Da aber $e = 2 \notin H$, gibt es also kein neutrales Element der Verknüpfung $*$ in H, also ist H keine Gruppe.