Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 2

(Gruppen)

Abgabe: bis Freitag, den 3. 11 ., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Es seien die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{Q}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{Q}\backslash\{0,1\}, i = 1, \ldots, 6$, gegeben:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1 - x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = \frac{x}{x-1}, \quad f_5(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_6(x) = \frac{x-1}{x}.$$

- Zeigen Sie, dass $G = \{f_i \mid i = 1, \ldots, 6\}$ eine Gruppe bezüglich der Komposition $f_i \circ f_j(x) = f_i(f_j(x))$ ist.
- Ist G abelsch?
- Geben Sie alle Untergruppen von G an. (Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus den Übungsgruppen, dass die Ordnung $m = |U|$ einer Untergruppe $U \subset G$ einer endliche Gruppe ein Teiler der Ordnung $n = |G| < \infty$ von G ist, d.h. $m|n$).

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Finden Sie auf $H = G \times G$ eine Verknüpfung $*_H : H \times H \to H$, so dass $(H, *_H)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $\mathbb{R}_{>k} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > k\}$, und definiere die Verknüpfung $*$ durch

$$x * y = xy - x - y + 2$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

- Ist $G = (\mathbb{R}_{>1}, *)$ eine Gruppe? Ist G abelsch?
- Ist $H = (\mathbb{R}_{>3}, *)$ eine Gruppe?

Aufgabe 4 (4 Punkte). Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe mit neutralem Element e und $g^2 = e$ für alle $g \in G$, dann ist G abelsch.

****

Die Bearbeitung der Zusatzaufgaben ist freiwillig. Die Punkte, die man auf Zusatzaufgaben erreicht, werden gutgeschrieben und können fehlende Punkte in der Gesamtwertung ersetzen.

Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $G = \{A \mid A \text{ ist ein } 3 \times 3 \text{ magisches Quadrat}\}$ die Gruppe der 3×3 magischen Quadrate (siehe Übungsgruppen).

- Sei $A \in G$ ein beliebiges 3×3 magisches Quadrat. Finden Sie die acht Abbildungen f_i, die A auf ein magisches Quadrat $f_i(A) \in G$ abbilden, $i = 1, \ldots, 8$.
- Zeigen Sie: die Menge $H = \{f_i \mid i = 1, \ldots, 8\}$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition.
- Ist H eine abelsche Gruppe?