Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Lösung zur 1. Aufgabe

Aufgabe 1. Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Abbildungen und $g \circ f : X \to Z$ die Komposition von f und g. Zeigen Sie:

1. Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

   Voraussetzung: $g \circ f$ ist injektiv, d.h., für alle $x, \tilde{x} \in X$ mit $g(f(x)) = g(f(\tilde{x}))$ gilt $x = \tilde{x}$.

   Zu zeigen: Für $x, \tilde{x} \in X$ mit $f(x) = f(\tilde{x})$ gilt $x = \tilde{x}$.

   Beweis: Seien also $x, \tilde{x} \in X$ mit $f(x) = f(\tilde{x})$. Da g eine Funktion ist, ist dann auch $g(f(x)) = g(f(\tilde{x}))$. Nun ist $g \circ f$ nach Voraussetzung injektiv, d.h., $x = \tilde{x}$, also ist f injektiv.

   Muß auch g injektiv sein? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

   Nein, g muss nicht injektiv sein, hier ein Gegenbeispiel (mit $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \geq 0\}$):

   Sei
   $$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = x$$
   und
   $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2\,,$$
   dann ist
   $$g \circ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, g(f(x)) = x^2$$
   injektiv: für $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}_+$ mit $x^2 = \tilde{x}^2$ gilt $x = \pm\tilde{x}$, aber da $x, \tilde{x} \geq 0$ folgt $x = \tilde{x}$. Aber g ist nicht injektiv: $g(-1) = g(1)$.

2. Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

   Voraussetzung: $g \circ f$ ist surjektiv, d.h., für alle $z \in Z$ gibt es ein $x \in X$ mit $g(f(x)) = z$.

   Zu zeigen: Für $z \in Z$ existiert $y \in Y$ mit $g(y) = z$.

   Beweis: Sei also $z \in Z$. Nach Voraussetzung gibt es $x \in X$ mit $g(f(x)) = z$. Sei $y = f(x)$. Dann ist $y \in Y$ und es gilt $g(y) = g(f(x)) = z$. Damit ist g surjektiv.

   Muß auch f surjektiv sein? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

   Nein f muss nicht surjektiv sei. Hier ein Gegenbeispiel:

   Sei
   $$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}, f(x) = x$$
   und
   $$g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1\}, g(x) = 1\,,$$
   dann ist
   $$g \circ f : \{1, 2, 3\} \to \{1\}, f(g(x)) = 1$$
   surjektiv: Für $z \in \{1\}$ (also $z = 1$) gibt es $x \in \{1, 2, 3\}$, zum Beispiel $x = 3$, mit
   $$g(f(x)) = g(f(3)) = g(3) = 1 = z.$$
   Die Abbildung f ist aber nicht surjektiv: für $z = 4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ gibt es kein $x \in \{1, 2, 3\}$ mit $f(x) = x = 4$.