Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Lösungsvorschläge Blatt 13

(Wiederholung)

Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte). Sei $F : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W. Weiter sei $\dim V < \infty$ und F injektiv. Zeigen Sie:
F ist genau dann bijektiv, wenn $\dim V = \dim W$.

Sei $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Dann ist nach Voraussetzung $\dim V = |I| < \infty$. Außerdem ist $(F(v_i))_{i \in I}$ linear unabhängig, da F injektiv ist.

Wenn F nun bijektiv ist, dann ist F insbesondere auch surjektiv und $\operatorname{Span} F(\mathcal{B}) = W$. Damit ist $(F(v_i))_{i \in I}$ eine Basis von W und $\dim W = |I| = \dim V$.

Ist umgekehrt $\dim V = \dim W$, dann ist $(F(v_i))_{i \in I} \subset W$ eine Famillie von $|I| = \dim W$ linear unabhängigen Vektoren in W. Daher ist $(F(v_i))_{i \in I}$ eine Basis von W und $\operatorname{Span}((F(v_i))_{i \in I}) = W$. Da (v_i) eine Basis von V ist, ist damit F surjektiv.

Gilt diese Aussage auch, wenn $\dim V = \infty$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Nein, die Aussage gilt nicht nicht, wenn $\dim V = \infty$ ist: Sei $V = \mathbb{R}[x]$ sowie $F : V \to V$ definiert durch

$$F(a_0 + \ldots + a_n x^n) = a_0 x + \ldots + a_n x^{n+1} .$$

Dann ist F linear, denn für $p = a_0 + \ldots + a_n x^n, q = b_0 + \ldots + b_n x^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
F(\mu p + \lambda q) &= F((\lambda a_0 + \mu b_0) + \ldots + (\lambda a_n + \mu b_n) x^n) \\
&= (\lambda a_0 + \mu b_0) x + \ldots + (\lambda a_n + \mu b_n) x^{n+1} \\
&= \lambda(a_0 x + \ldots + a_n x^{n+1}) + \mu(b_0 x + \ldots + b_n x^{n+1}) \\
&= \lambda F(p) + \mu F(q) .
\end{aligned}$$

Außerdem ist F injektiv: Gilt $F(p) = F(q)$ so gilt

$$a_0 x + \ldots + a_n x^{n+1} = b_0 x + \ldots + b_n x^{n+1} \implies (a_0 - b_0) x + \ldots + (a_n - b_n) x^{n+1} = 0 .$$

Koeffizientenvergleich ergibt $(a_0 - b_0) = 0, \ldots, (a_n - b_n) = 0$ und also $p = q$.
F ist aber nicht surjektiv: Für alle $p = a_0 + \ldots + a_n x^n \in V$ gilt

$$F(p) = a_0 x + \ldots + a_n x^{n+1} \neq 1$$

wobei $1 \in V$ ein konstantes Polynom ist. Also ist $F(V) \neq V$.

Zusatzaufgabe 2 (4 Punkte). Sei K ein Körper und sei $(R, +, \circ)$ ein Ring. Ferner sei $(R, +, \cdot)$ auch ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ und sei $\phi : R \to R$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

1. Gilt
$$\phi(v_i v_j) = \phi(v_i)\phi(v_j)\ \forall i, j = 1, ..., n,$$
so ist ϕ ein Ringhomomorphismus.

Da ϕ nach Voraussetzung K-linear ist, gilt
$$\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w) \quad \forall v, w \in R\,.$$
Bleibt zu zeigen, dass
$$\phi(v \cdot w) = \phi(v) \cdot \phi(w) \quad \forall v, w \in R\,.$$
Da (v_i) eine Basis ist, gibt es $\lambda_i, \mu_i \in K$ mit
$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \quad w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j\,.$$
Damit
$$\begin{aligned}
\phi(v \cdot w) &= \phi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_i v_i\right)\right) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j v_i \cdot v_j\right) \\
&\overset{\phi \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \phi(v_i \cdot v_j) \overset{\text{Vor}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \phi(v_i) \cdot \phi(v_j) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(v_i)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \phi(v_j)\right) \\
&\overset{\phi \text{ linear}}{=} \phi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \cdot \phi\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j\right) = \phi(v) \cdot \phi(w).
\end{aligned}$$

2. Sei $\mathbb{H} = \{a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k | a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3, 4\}$ die Menge der Quaternionen und sei $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ die lineare Abbildung, die durch
$$\phi(1) = 1,\ \phi(i) = j,\ \phi(j) = k,\ \phi(k) = i,$$
definiert ist. Zeigen Sie, dass ϕ ein Ringhomomorphismus ist.

Da $\mathbb{H}$ ein Ring ist und $\mathbb{H}$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4$ ist, können wir den ersten Teil der Aufgabe anwenden. Da $(1, i, j, k)$ eine Basis von $\mathbb{H}$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum und ϕ $\mathbb{R}$-linear ist,überprüfen wir die Voraussetzung von (1)
$$\begin{aligned}
\phi(i \cdot j) &= \phi(k) = i = j \cdot k = \phi(i) \cdot \phi(j) \\
\phi(j \cdot k) &= \phi(i) = j = k \cdot i = \phi(j) \cdot \phi(k) \\
\phi(k \cdot i) &= \phi(j) = k = i \cdot j = \phi(k) \cdot \phi(i)\,.
\end{aligned}$$
Außerdem gilt $\phi(i)^2 = \phi(j)^2 = \phi(k)^2 = -1$ sowie $\phi(i^2) = \phi(j^2) = \phi(k^2) = \phi(-1) \overset{\phi lin}{=} -1$. Weiter ist $\phi(1 \cdot x)\phi(x) = \phi(1) \cdot \phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{H}$. Da ϕ K-linear ist, folgen die verbleibenden Gleichungen aus $\phi(-x) = -\phi(x)$ sowie $j \cdot i = -i \cdot j, k \cdot j = -j \cdot k, i \cdot k = -k \cdot i$.

Also ist ϕ ein Ringhomomorphismus.

Zusatzaufgabe 3 (4 Punkte). Sei $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \,|\deg(p) \leq 3\}$ und $F : V \to V$ die Abbildung, die durch

$$F(p(x)) = \frac{dp}{dx}(x) - p(x)$$

definiert ist. Sei $\mathcal{A}$ die Standardbasis und sei $\mathcal{B} = (1, 1-x, 1-x+x^2, 1-x+x^2-x^3) = (q_0, q_1, q_2, q_3)$.

1. Finden Sie die Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$.
   Die Gleichungen

$$\begin{aligned} F(1) &= -1 = a_{00}q_0 \\ F(x) &= 1 - x = a_{11}q_1 \\ F(x^2) &= 2x - x^2 = a_{02}q_0 + a_{12}q_1 + a_{22}q_2 \\ F(x^3) &= 3x^2 - x^3 = a_{03}q_0 + a_{13}q_1 + a_{23}q_2 + a_{33}q_3 \end{aligned}$$

   ergeben das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{00} &= -1 \\ a_{11} &= 1 \\ a_{02} + a_{12} + a_{22} &= 0 \\ -a_{12} - a_{22} &= 2 \\ a_{22} &= -1 \\ a_{03} + a_{13} + a_{23} + a_{33} &= 0 \\ -a_{13} - a_{23} - a_{33} &= 0 \\ a_{23} + a_{33} &= 3 \\ -a_{33} &= -1 \end{aligned}$$

   dessen Lösung man ausrechnet als:

$$a_{00} = -1, a_{11} = 1, a_{02} = 2, a_{12} = 1, a_{22} = -1, a_{03} = 0, a_{13} = -3, a_{23} = 2, a_{33} = 1\,,$$

   womit

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Benutzen Sie $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$, um $F(1 + x + x^2 + x^3)$ zu berechnen.

   Die Koordinaten von $1 + x + x^2 + x^3$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   so dass

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Damit ist

$$F(1 + x + x^2 + x^3) = 1 + (-3)(1 - x) + (1 - x + x^2) + (1 - x + x^2 - x^3) = x + 2x^2 - x^3\,.$$

   (Dies stimmt natürlich mit $F(1 + x + x^2 + x^3) = 1 + 2x + 3x^2 - 1 - x - x^2 - x^3$ überein!).

Zusatzaufgabe 4 (4 Punkte). Seien $U, W \subset V$ Untervektorräume des K-Vektorraumes V. Weiter sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $U \cap W$, sowie $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k)$ eine Basis von U und $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_l)$ eine Basis von W. Zeigen Sie:

$$(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l)$$

ist eine Basis von $U + W$.

Sei $v \in U + W$, dann existieren $u \in U, w \in W$ mit $v = u + w$. Da $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k)$ eine Basis von U ist, existieren $\lambda_i, \mu_i \in K$ mit

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \,.$$

Genauso ist $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_l)$ eine Basis von W und es existieren $\tilde{\lambda}_i, \nu_i$ mit

$$w = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i v_i + \sum_{i=1}^{l} \nu_i w_i \,.$$

Also ist

$$v = u + w = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \tilde{\lambda}_i) v_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i + \sum_{i=1}^{l} \nu_i w_i \in \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l) \,.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = (n + k) + (n + l) - n = k + l + n \,.$$

Da wir $k + l + n$ Vektoren gefunden haben, die $U + W$ aufspannen, müssen diese also linear unabhängig sein.