Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 13

(Wiederholung)

****

Abgabe: bis Donnerstag, den 8.2. , 12:00 Uhr (nach der Vorlesung).

Die Bearbeitung dieser Zusatzaufgaben ist freiwillig, ist aber dringend empfohlen zur Vorbereitung auf die Klausur. Bitte geben Sie dieses Übungsblatt nur dann ab, wenn Sie noch Punkte für die Zulassung zur Klausur benötigen. Alle anderen Abgaben können leider nicht mehr korrigiert werden. Bitte beachten Sie auch den vorgezogenen Abgabetermin.

****

Zusatzaufgabe 1 (4 Punkte). Sei $F : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W. Weiter sei $\dim V < \infty$ und F injektiv. Zeigen Sie:
F ist genau dann bijektiv, wenn $\dim V = \dim W$.

Gilt diese Aussage auch, wenn $\dim V = \infty$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Zusatzaufgabe 2 (4 Punkte). Sei K ein Körper und sei $(R, +, \circ)$ ein Ring. Ferner sei $(R, +, \cdot)$ auch ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ und sei $\phi : R \to R$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

1. Gilt
$$\phi(v_i v_j) = \phi(v_i)\phi(v_j) \ \forall i, j = 1, ..., n,$$
so ist ϕ ein Ringhomomorphismus.

2. Sei $\mathbb{H} = \{a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k | a_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, 3, 4\}$ die Menge der Quaternionen und sei $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ die lineare Abbildung, die durch
$$\phi(1) = 1, \ \phi(i) = j, \ \phi(j) = k, \ \phi(k) = i,$$
definiert ist. Zeigen Sie, dass ϕ ein Ringhomomorphismus ist.

Zusatzaufgabe 3 (4 Punkte). Sei $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \,|\deg(p) \le 3\}$ und $F : V \to V$ die Abbildung, die durch
$$F(p(x)) = \frac{dp}{dx}(x) - p(x)$$
definiert ist. Sei $\mathcal{A}$ die Standardbasis und sei $\mathcal{B} = (1, 1 - x, 1 - x + x^2, 1 - x + x^2 - x^3)$.

1. Finden Sie die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$.
2. Benutzen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$, um $F(1 + x + x^2 + x^3)$ zu berechnen.

bitte wenden!

Zusatzaufgabe 4 (4 Punkte). Seien $U, W \subset V$ Untervektorräume des K-Vektorraumes V. Weiter sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $U \cap W$, sowie $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k)$ eine Basis von U und $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_l)$ eine Basis von W. Zeigen Sie:

$$(v_1, v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l)$$

ist eine Basis von $U + W$.