Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 12

(Matrix des Basiswechsels, Bild und Kern)

Abgabe: bis Freitag, den 2.2., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum und $F : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $F^2 = F \circ F = F$. Zeigen Sie: es existieren Unterräume $U, W \subset V$ mit

$$V = U \oplus W \quad \text{und} \quad F(w) = 0\,, \quad F(u) = u \quad \forall w \in W,\ \forall u \in U\,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Bestimmen Sie Basen von $\ker A$ und $\operatorname{im} A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \sin\cdot\cos, \sin^2, \cos^2)$ und $V = \operatorname{Span}\mathcal{B} \subset \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Man betrachte die lineare Abbildung $F : V \to V$, wobei $F(f) = f'$ die Ableitung von $f \in V$ ist.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.
2. Bestimmen Sie die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.
3. Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{im} F$ und $\ker F$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). In $\mathbb{R}^3$ seien die Basen

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben (dies muß nicht überprüft werden).

1. Bestimmen Sie die Matrix $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.
2. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.