Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 11

(Lineare Abbildungen, Matrizen)

Abgabe: bis Freitag, den 26.1., 12:00 Uhr.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Man betrachte den Untervektorraum

$$U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + w = 0, x + 2z - w = 0 \}$$

von $\mathbb{R}^4$ und die lineare Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ z - w \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in U\,.$$

(Es muß nicht gezeigt werden, dass $U \subset \mathbb{R}^4$ ein Unterraum ist und dass $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}^2)$ gilt).

1. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von U ist.

Sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

folgt $\lambda = \mu = 0$ (zweite und dritte Gleichung), also ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig.

Da $1 - 2(1) + 1 = 0$ und $1 + 2 \cdot 0 - 1 = 0$ ist $v_1 \in U$, genauso ergibt $1(-1) - 2(0) + 1 = 0$ und $-1 + 2(1) - 1 = 0$, dass $v_2 \in U$.

Sei

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in U,$$

d.h, $x - 2y + w = 0, x + 2z - w = 0$, also

$$v = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x+w}{2} \\ \frac{w-x}{2} \\ w \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ \frac{x+w}{2} \\ \frac{w-x}{2} \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

gibt $\lambda = \frac{x+w}{2}, \mu = \frac{w-x}{2}$. Damit ist in der Tat

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+w}{2} - \frac{w-x}{2} \\ \frac{x+w}{2} \\ \frac{w-x}{2} \\ \frac{x+w}{2} + \frac{w-x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x+w}{2} \\ \frac{w-x}{2} \\ w \end{pmatrix} = v\,,$$

also ist $U \subset \operatorname{Span} \mathcal{B}$. Da ein U Unterraum ist und $\mathcal{B} \subset U$ gilt auch $\operatorname{Span} \mathcal{B} \subset U$, so dass $U = \operatorname{Span} \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von U.

Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von U ist, ist daher $\mathcal{B}$ eine Basis von U.

2. Zeigen Sie, dass F ein Vektorraumisomorphismus ist.

   Es gilt

   $$F(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} =: w_1, \quad F(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} =: w_2\,.$$

   Da (w_1, w_2) linear unabhängig ist, ist mit Aufgabe 2), Blatt 10, die lineare Abbildung F injektiv. Da $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ und $\dim \operatorname{Span}(w_1, w_2) = 2$ ist also (w_1, w_2) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ und damit $F(U) = \mathbb{R}^2$. Also ist F surjektiv.

3. Finden Sie die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}(F)$, die F bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ von U und der Standardbasis $\tilde{\mathcal{B}} = (e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$ zugeordnet ist.

   $A = M^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}(F) = (a_{ij})$ ist gegeben durch

   $$w_j = F(v_j) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} e_i = a_{1j} e_1 + a_{2j} e_2\,.$$

   Also

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Betrachten Sie die Basen

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $\mathbb{R}^2$, sowie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 3)\,.$$

(Es muß nicht gezeigt werden, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen sind).

1. Bestimmen Sie die der Matrix A bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zugeordnete lineare Abbildung $F = \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$.

   Die lineare Abbildung F ist gegeben durch

   $$F(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$$

   wobei $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$, also:

   $$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   $$F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Damit ist für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y)v_1 + (y-z)v_2 + zv_3 \in \mathbb{R}^3$:

   $$F(v) = (x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y + 3z \\ 5x - 6y \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung F bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$