Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 11

(Lineare Abbildungen, Matrizen)

Abgabe: bis Freitag, den 26.1., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien U, V, W Vektorräume über K und $F \in \mathrm{Hom}_K(V,W), G \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$. Zeigen Sie:

1. Ist F ein Vektorraumisomorphismus, so ist auch die Inverse $F^{-1} : W \to V$ von F ein Vektorraumisomorphismus.
2. $F \circ G \in \mathrm{Hom}_K(U,W)$
3. Ist $\tilde{W} \subset W$ ein Unterraum von W, so ist $F^{-1}(\tilde{W})$ ein Unterraum von V.
4. $\ker F = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$ ist ein Unterraum von V.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Man betrachte den Untervektorraum

$$U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + w = 0, x + 2z - w = 0\}$$

von $\mathbb{R}^4$ und die lineare Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ z-w \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in U\,.$$

(Es muß nicht gezeigt werden, dass $U \subset \mathbb{R}^4$ ein Unterraum ist und dass $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \mathbb{R}^2)$ gilt).

1. Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
eine Basis von U ist.
2. Zeigen Sie, dass F ein Vektorraumisomorphismus ist.
3. Finden Sie die Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}}(F)$, die F bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ von U und der Standardbasis $\tilde{\mathcal{B}} = (e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$ zugeordnet ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $V = \{p \in K[x] \mid \deg p \leq 5\}$ und die lineare Abbildung $F : V \to V$ gegeben durch

$$p = \sum_{i=0}^{5} a_i x^i \mapsto F(p) = p' = \sum_{i=0}^{4} (i+1) a_{i+1} x^i\,.$$

Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V an (mit Nachweis!) und bestimmen Sie die der linearen Abbildung F bezüglich dieser Basis zugeordnete Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.

bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte). Betrachten Sie die Basen

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $\mathbb{R}^2$, sowie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 3)\,.$$

(Es muß nicht gezeigt werden, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen sind).

1. Bestimmen Sie die der Matrix A bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zugeordnete lineare Abbildung $F = \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$.

2. Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung F bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.