Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 10

(Lineare Abbildungen)

Abgabe: bis Freitag, den 19.1., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $F : V \to W$ eine Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W. Zeigen Sie:
F ist genau dann K-linear, wenn

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v) \quad \text{für alle } \lambda, \mu \in K, u, v \in V .$$

"$\Longrightarrow$": Sei F K-linear, d.h. es gelten

(L1) $\forall u, v \in V : F(u+v) = F(u) + F(v)$

(L2) $\forall v \in V \forall \lambda \in K : F(\lambda v) = \lambda F(v)$.

Dann gilt $\forall \lambda, \mu \in K, u, v \in V$:

$$F(\lambda u + \mu v) \overset{L1}{=} F(\lambda u) + F(\mu v) \overset{L2}{=} \lambda F(u) + \mu F(v)\,. \tag{1}$$

"$\Longleftarrow$": Es gelte (1) für alle $\lambda, \mu \in K, u, v \in V$. Dann gilt insbesondere für $\lambda = \mu = 1 \in K$, $u, v \in V$:

$$F(u+v) = F(1 \cdot u + 1 \cdot v) \overset{(1)}{=} 1 \cdot F(u) + 1 \cdot F(v) = F(u) + F(v)\,.$$

Außerdem gilt für $v \in V, \lambda \in K$ mit $u \in V$ beliebig und $\mu = 0$:

$$F(\lambda \cdot v) = F(\lambda \cdot v + 0 \cdot u) \overset{(1)}{=} \lambda \cdot F(v) + \underbrace{0 \cdot F(u)}_{=0} = \lambda \cdot F(v)$$

Damit gelten (L1) und (L2).

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien V und W K-Vektorräume und $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V sowie $(w_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in W. Sei $F : V \to W$ die K-lineare Abbildung, die durch $F(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$ definiert ist. Zeigen Sie:

F ist genau dann nicht injektiv, wenn die Familie $(w_i)_{i \in I}$ linear abhängig ist.

Zunächst einmal ein Beispiel!

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Fv_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Fv_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dann ist $F(v_1) \neq F(v_2)$, aber F ist nicht injektiv, da

$$F(3v_1) \overset{L2}{=} 3F(v_1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 2F(v_2) \overset{L2}{=} F(2v_2)\,,$$

aber $3v_1 \neq 2v_2$.

Wir zeigen die äquivalente Aussage:

F ist genau dann injektiv, wenn die Familie $(w_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist.

" $\Longrightarrow$ " Nehmen Sie an dass, F injektiv ist, d.h.,

$$\forall v, w \in V,\ F(v) = F(w) \implies v = w\,.$$

Insbesondere für $w = 0$ (und daher $F(w) = 0$) erhält man

$$\forall v \in V,\ F(v) = 0 \implies v = 0\,. \tag{2}$$

Um nun zu zeigen, dass $(w_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist, nehmen Sie an, dass $\exists \alpha_i \in K,\ \forall i \in I$, so dass $\sum_{i\in I} \alpha_i w_i = 0$. Also

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} \alpha_i w_i = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{i\in I} \alpha_i F(v_i) = 0 \\
&\overset{(L2)}{\Longrightarrow} \quad \sum_{i\in I} F(\alpha_i v_i) = 0 \\
&\overset{(L1)}{\Longrightarrow} \quad F(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i) = 0 \\
&\overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \sum_{i\in I} \alpha_i v_i = 0 \\
&\overset{(v_i) l.u}{\Longrightarrow} \quad \alpha_i = 0\ \forall i \in I\,.
\end{aligned}$$

Also ist $(w_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

"$\Longleftarrow$" Nehmen Sie an, dass $(w_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist. Man wähle $v, w \in V$, d.h., $v = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i$, $w = \sum_{i\in I} \beta_i v_i$. Um zu zeigen, dass F injektiv ist, nehme man an, dass $F(v) = F(w)$:

$$\begin{aligned}
F(v) = F(w) \quad &\Longrightarrow \quad F(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i) = F(\sum_{i\in I} \beta_i v_i) \\
&\Longrightarrow \quad F(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i) - F(\sum_{i\in I} \beta_i v_i) = 0 \\
&\overset{(L1)}{\Longrightarrow} \quad F(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i - \sum_{i\in I} \beta_i v_i) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad F(\sum_{i\in I} (\alpha_i - \beta_i) v_i) = 0 \\
&\overset{(L1),(L2)}{\Longrightarrow} \quad \sum_{i\in I} (\alpha_i - \beta_i) F(v_i) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{i\in I} (\alpha_i - \beta_i) w_i = 0 \\
&\overset{(w_i) l.u.}{\Longrightarrow} \quad \alpha_i - \beta_i = 0\ \forall i \in I \\
&\Longrightarrow \quad v = w.
\end{aligned}$$