Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Katrin Leschke
WS 2006/2007

Lineare Algebra I, Blatt 10
(Lineare Abbildungen)

Abgabe: bis Freitag, den 19.1., 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $F : V \to W$ eine Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W. Zeigen Sie:
F ist genau dann K-linear, wenn

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v) \quad \text{für alle } \lambda, \mu \in K, u, v \in W\,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien V und W K-Vektorräume und $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V sowie $(w_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in W. Sei $F : V \to W$ die K-lineare Abbildung, die durch $F(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$ definiert ist. Zeigen Sie:

F ist genau dann nicht injektiv, wenn die Familie $(w_i)_{i \in I}$ linear abhängig ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Welche sind Vektorraumisomorphismen? (Begründung!)

1. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 3x - y \end{pmatrix}$.

2. Sei $(v_i)_{i=1,\dots,4}$ eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^4$. Definiere $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ durch
$$F(v) = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 - \lambda_4\,,$$
wobei $v = \sum_{i=1}^4 \lambda_i v_i$.

3. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sin z$.

4. Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation und
$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}\,.$$

bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte). Gibt es lineare Abbildungen $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, (warum oder warum nicht?) mit

1.
$$F_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$F_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

3.
$$F_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad F_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn ja, finde die Matrix $A_i \in \mathrm{Mat}_K(3 \times 2)$ mit $F_i(x) = A_i x$, $i = 1, 2, 3$.