Vorschläge für die Übungsgruppen:

Aufgabe 1. Überprüfe für jede der folgenden Abbildungen, ob diese injektiv und/oder surjektiv und/oder linear ist:

1. $f_1 : [0, 2\pi) \to \mathbb{C},\ f_1(x) = \cos(x) + i\sin(x);$

   f_1 **ist injektiv:**

   Vielleicht hilft es, sich die Abbildung zu veranschaulichen: man durchläuft den Einheitskreis.

   Sei $x, y \in [0, 2\pi)$ und nehme an, dass $f_1(x) = f_1(y)$.

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_1(y) &\implies \cos(x) + i\sin(x) = \cos(y) + i\sin(y) \\ &\implies \begin{Bmatrix} \cos(x) = \cos(y) \\ \sin(x) = \sin(y) \end{Bmatrix} \\ &\implies \begin{Bmatrix} x = y \text{ oder } x = 2\pi - y \\ x = y \text{ oder } x \equiv \pi - y (\operatorname{mod} 2\pi) \end{Bmatrix} \\ &\implies x = y. \end{aligned}$$

   f_1 **ist nicht surjektiv:** Man nehme $z = 0 \in \mathbb{C}$. Beachte, dass

$$|f_1(x)|^2 = |\cos(x) + i\sin(x)|^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1\,.$$

   Also, gibt es kein $x \in [0, 2\pi)$ mit $f_1(x) = 0$.

   f_1 **ist nicht linear:** Da $f_1(0) = 1 \neq 0$, kann f_1 nicht linear sein.

2. $f_2 : \{p \in \mathbb{R}[x] \,|\deg(p) \leq 2\} \implies \mathbb{R}^3$,

$$f_2(a_0 + a_1x + a_2x^2) \quad = \quad \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 - a_1 \\ 3a_2 \end{pmatrix}.$$

   f_2 **ist linear:** Sei $p_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2, p_2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}[x]$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $f_2(\lambda p_1 + \mu p_2) = \lambda f_2(p_1) + \mu f_2(p_2)$:

$$\begin{aligned} f_2(\lambda p_1 + \mu p_2) &= f_2(\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2) + \mu(b_0 + b_1x + b_2x^2)) \\ &= f_2((\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + (\lambda a_2 + \mu b_2)x^2) \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1) \\ (\lambda a_0 + \mu b_0) - (\lambda a_1 + \mu b_1) \\ 3(\lambda a_2 + \mu b_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 - a_1 \\ 3a_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_0 + b_1 \\ b_0 - b_1 \\ 3b_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f_2(a_0 + a_1x + a_2x^2) + \mu f_2(b_0 + b_1x + b_2x^2) \\ &= \lambda f_2(p_1) + \mu f_2(p_2). \end{aligned}$$

f_2 **ist injektiv:** Wir zeigen, dass wenn $f_2(p) = f_2(\tilde{p})$, so gilt $p = \tilde{p}$. Schreibe $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \tilde{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]$ und nehme an, dass $f_2(p) = f_2(\tilde{p})$. Da f_2 linear ist, folgt

$$\begin{aligned} f_2(p - \tilde{p}) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} (a_0 - \tilde{a}_0) + (a_1 - \tilde{a}_1) \\ (a_0 - \tilde{a}_0) - (a_1 - \tilde{a}_1) \\ 3(a_2 - \tilde{a}_2) \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow \quad (a_0 - \tilde{a}_0) = (a_1 - \tilde{a}_1) = (a_2 - \tilde{a}_2) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad p = \tilde{p}. \end{aligned}$$

Also, ist f_2 injektiv.

f_2 **ist surjektiv:**

Es gilt $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2$ ist eine Basis von $\{p \in K[x] \mid \deg p \leq 2\}$. Da f_2 linear ist, gilt:

$$\operatorname{im} f_2 = \operatorname{Span}(f_2(p_0), f_2(p_1), f_2(p_2)) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Da

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0,$$

sind die drei Vektoren linear unabhängig. Da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, bilden diese Vektoren also auch eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und damit ist $\operatorname{Span}(f_2(p_i)) = \mathbb{R}^3$ und f_2 surjektiv.

Aufgabe 2. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch Spiegelung an der Ebene, die $(1, 1, 0), (1, 0, 1)$ erzeugt ist, definiert ist. Zeige, dass die Menge der Fixpunkte von F gegeben ist durch

$$A = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid F(v) = v\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}.$$

Zeige, dass A ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimme Basen von A, $\operatorname{Im} F$ und $\ker F$.

Die Fixpunkte von einer Spiegelung an einer Ebene sind die Punkte der Ebene. Also

$$A = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

und A ist damit ein Unterraum. Wir überprüfen, dass $A = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x - y - z = 0\}$. Zuerst zeigen wir, dass

$$A \subset \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x - y - z = 0\}.$$

Sei $a \in A$. Schreibe

$$a = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x - y - z = (\lambda + \mu) - (\lambda) - (\mu) = 0$ und $a \in \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x - y - z = 0\}$.

Also $A \subset \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x - y - z = 0\}$.

Jetzt zeigen wir, dass

$$\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x - y - z = 0\} \subset A\,.$$

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ so dass $x - y - z = 0$, also $x = y + z$ und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in A$$

so dass $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y - z = 0\} \subset A$.

Finden einer Basis von A ist leicht: $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist linear unabhängig (da keiner der Vektoren Vielfaches des anderen ist) und erzeugt A, also ist $\mathcal{A}$ eine Basis von A.
Um Basen von $\ker F, \operatorname{im} F$ zu finden, beachte man, dass ein Doppelspiegelung die Identität ist, also

$$F \cdot F = \mathrm{Id}\,.$$

Damit ist also F bijektiv, also insbesondere ist F injektiv und surjektiv. Außerdem ist F linear, da Spiegelungen Summen und Vielfache respektieren, daher ist $\ker F = \{0\}$ und $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^3$. Ein Basis von $\operatorname{im} F$ ist zum Beispiel

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

die sich deshalb anbietet, weil $F(v_1) = v_1, F(v_2) = v_2, F(v_3) = -v_3$.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring. Entscheide, ob die folgende Mengen Ringe sind oder nicht. (Beweis oder Gegenbeispiel):

1. $S_1 := \{f : \mathbb{R} \to R \mid f \text{ surjektiv}\}$;

   S_1 ist kein Ring: $e + f = f$ für alle $f \in S_1$ genau dann, wenn $e(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aber e ist nicht surjektiv (zumindest wenn $R \neq \{0\}$), also existiert kein neutrales Element bezüglich der Addition in S_1.

2. $S_2 := \{f : \mathbb{R} \to R \mid f \text{ ist gerade (d.h. f(x)=f(-x))}\}$;

   Um zu zeigen, dass S_2 ein Unterring von $S = \{f : \mathbb{R} \to R\}$ ist, mussen wir zeigen, dass $(S_2, +)$ eine abelsche Untergruppe von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, R)$ ist sowie, dass $(S_2, \cdot)$ assoziativ ist.

   - $e(x) = 0 = e(-x) \implies e \in S_2$.
   - Sei $f, g \in S_2$. Dann $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$. Also $f + g \in S_2$.
   - Sei $f \in S_2$. Dann $(-f)(-x) = -(f(-x)) = -(f(x)) = (-f)(x)$. Also $-f \in S_2$.
   - Sei $f, g, h \in S_2$. Da R ein Ring ist, gilt

     $$((fg)h)(x) = (f(x)g(x))h(x) \overset{M4inR}{=} f(x)(g(x)h(x)) = (f(gh))(x)$$

     für alle $x \in \mathbb{R}$ also $(fg)h = f(gh)$.

3. $S_3 := \{f : \mathbb{R} \to R \mid f(x) = 0 \text{ für höchstens endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.

   $e \notin S_3$, also kein Ring.

4. $S_4 := \{f : \mathbb{R} \to R \mid f(x) = 0 \text{ für mindestens ein } x \in \mathbb{R}\}$.
   Gegenbeispiel $R = \mathbb{R}$ und
   $$f(x) = x - 1, g(x) = -x \in S_4$$
   da $f(1) = 0$ und $g(0) = 0$, aber $f + g = -1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist $(S_4, +)$ keine Gruppe.