Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Funktionentheorie.html

Übungsblatt 8

Abgabetermin 08.07.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt und schicken Sie Ihre Abgabe per Email an Ihren Tutor.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 29. *Meromorphe Funktionen auf einem Gebiet.* Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und

$$\widetilde{\mathcal{M}(U)} := \{(f, P) \mid P \subset U \text{ diskret in } U, f\colon U \to \overline{\mathbb{C}} \text{ meromorph}, f\colon U \backslash P \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

wobei für $(f, P), (g, Q) \in \widetilde{\mathcal{M}(U)}$:

$$(f, P) \sim (g, Q) :\Leftrightarrow f|_{U\backslash(P\cup Q)} = g|_{U\backslash(P\cup Q)}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf $\widetilde{\mathcal{M}(U)}$.

(b) Für meromorphe Funktionen $f, g\colon U \to \overline{\mathbb{C}}$ mit $f \not\equiv 0$ und $g \not\equiv 0$ gilt für alle $z \in U$

$$\nu_z(f \cdot g) = \nu_z(f) + \nu_z(g)$$
$$\nu_z(f/g) = \nu_z(f) - \nu_z(g).$$

Aufgabe 30. *Körper meromorpher Funktionen.*

(a) (2 Punkte) Es seien $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\widetilde{\mathcal{M}(U)}$, $\sim$ wie in Aufgabe 29. Zeigen Sie:
$$\mathcal{M}(U) := \widetilde{\mathcal{M}(U)}/{\sim}$$
trägt die Struktur eines Körpers.

(b) (1 Punkt) Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathcal{M}(U)$ wie in (a) ist auch für nichtleere offene $U \subset \mathbb{C}$ wieder ein Körper.

(c) (1 Punkt) Wie lassen sich Elemente von $\mathcal{M}(U)$ für nichtleere offene $U \subset \mathbb{C}$ durch meromorphe Funktionen auf Gebieten ausdrücken?

Aufgabe 31. *Laurent-Reihen.* Bestimmen Sie die Laurent-Reihen-Entwicklung (inklusive Konvergenzbereich) der Funktionen

(a) $f(z) = \dfrac{z+2-2i}{(z-i)(z-2)}$ um die Punkte $z = i$ und $z = 2$

(b) $f(z) = \dfrac{\sin^2(z)}{z^n}$ für $n \in \{1, 2, \dots\}$ um den Punkt $z = 0$

und die Art der Singularität in den angegeben Punkten.

Aufgabe 32. *Eine ganze Funktion dominiert betragsmäßig eine andere.* Es seien $f, g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei ganze Funktionen, so dass $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $f = \lambda g$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.