Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Funktionentheorie.html

Übungsblatt 7

Abgabetermin 01.07.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt und schicken Sie Ihre Abgabe per Email an Ihren Tutor.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 25. *Additionstheoreme für komplexe trigonometrische Funktionen.* Beweisen Sie die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w, & \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w, \\ \sin(z-w) &= \sin z \cos w - \cos z \sin w, & \cos(z-w) &= \cos z \cos w + \sin z \sin w, \\ \sin(2z) &= 2 \sin z \cos z, & \cos(2z) &= \cos^2 z - \sin^2 z \end{aligned}$$

sowie

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 26. *Gebietstreue.*

(a) (2 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie: eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $V \subset \mathbb{C}$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset U$ offen ist.

(b) (2 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet Ihrer Wahl. Geben Sie ein Beispiel von einer nicht-konstanten stetigen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$, so dass $f(U)$ nicht offen ist. Können Sie ein Beispiel finden mit f holomorph?

Aufgabe 27. *Schwarzsches Lemma.* Sei $f\colon \mathrm{D}_1(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathrm{D}_1(0)$. Zeigen Sie:

(a) $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ ist eine holomorphe Funktion auf $\mathrm{D}_1(0) \setminus \{0\}$, die sich holomorph nach $\mathrm{D}_1(0)$ fortsetzen lässt.

(b) Für jedes $r \in (0,1)$ gilt: $|g(z)| \leq 1/r$ für alle z mit $|z| \leq r$.

(c) Für alle $z \in \mathrm{D}_1(0)$ gilt, dass $|f(z)| \leq |z|$.

(d) Falls entweder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$ oder $|f'(0)| = 1$, so gilt $f(z) = az$ für $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$.

Teile (c) und (d) sind die Aussagen des *Schwarzschen Lemmas.*

Aufgabe 28. *Analytische Fortsetzung längs Kreisketten und Wegen.* Eine endliche Folge $(K_0, \ldots, K_n)$ von offenen Kreisscheiben $K_i = D_{R_i}(z_i)$ heißt *Kreiskette*, falls für $i = 1, \ldots, n$ die Mittelpunkte von K_{i-1} und K_i im Durchschnitt $K_{i-1} \cap K_i$ enthalten sind.

Für $i = 0, \ldots, n$ seien $f_i \colon K_i \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen so dass für $0 < i \leq n$ gilt: $f_{i-1}|_{K_{i-1} \cap K_i} = f_i|_{K_{i-1} \cap K_i}$. Dann sagt man, dass f_n durch *analytische Fortsetzung* von f_0 längs der Kreiskette $(K_0, \ldots, K_n)$ entsteht.

Es sei $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Man sagt, eine Kreiskette $(K_0, \ldots, K_n)$ verlaufe *längs* γ, wenn es eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ der Form $[t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_{n-1}, t_n]$ gibt mit $t_0 = a$ und $t_n = b$, so dass $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset K_{i-1} \cap K_i$. Zeigen Sie:

(a) (3 Punkte) Es sei $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, K_0 eine offene Kreisscheibe um $\gamma(a)$ und $f_0 \colon K \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner sei K' eine offene Kreisscheibe um $\gamma(b)$ und $g, \widetilde{g} \colon K' \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, die durch analytische Fortsetzung von f längs verschiedener Kreisketten längs γ entstehen. Zeigen Sie, dass $g = \widetilde{g}$.

Die analytische Fortsetzung hängt somit nur von dem Weg und nicht von der Kreiskette ab.

Hinweis: Seien $(K_0, \ldots, K_n)$ und $(\widetilde{K}_0, \ldots, \widetilde{K}_m)$ zwei Kreisketten längs γ mit Unterteilungen $[t_0, t_1] \cup \cdots \cup [t_{n-1}, t_n]$ bzw. $[\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1] \cup \cdots \cup [\widetilde{t}_{m-1}, \widetilde{t}_m]$, so dass $K_0 = \widetilde{K}_0 = K$ und $K_n = \widetilde{K}_m = K'$. Schreiben Sie $f_i \colon K_i \to \mathbb{C}$ bzw. $\widetilde{f}_j \colon \widetilde{K}_j \to \mathbb{C}$ für analytische Fortsetzungen entlang dieser Kreisketten und seien ϕ und $\widetilde{\phi}$ Funktionen definiert für alle $t \in [a, b]$ durch $\phi(t) = f_i(\gamma(t))$ falls $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ bzw. $\widetilde{\phi}(t) = \widetilde{f}_j(t)$ falls $\widetilde{t}_{j-1} \leq t \leq \widetilde{t}_j$. Betrachten Sie nun die Menge $\mathcal{J} = \{t \mid \phi(t) = \widetilde{\phi}(t)\} \subset [a, b]$.

(b) (1 Punkt) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass (a) nicht gelten muss, wenn g und $\widetilde{g}$ durch analytische Fortsetzung längs zwei verschiedener Wege mit selbem Start- und Endpunkt entstehen.

Hinweis: Benutzen Sie beispielsweise den Logarithmus auf den offenen Kreisscheiben $K = \mathrm{D}_R(i)$ und $K' = \mathrm{D}_R(-i)$ mit $0 < R < 1$ und einen Weg von $-i$ nach i, der in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ liegt, sowie einen Weg, der in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ liegt.