Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Funktionentheorie.html

Übungsblatt 5

Abgabetermin 17.06.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt und schicken Sie Ihre Abgabe per Email an Ihren Tutor.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 17. *Eigenschaften der Umlaufzahl.*

(a) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\gamma \to \mathbb{C}$, $z \mapsto n_\gamma(z)$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\gamma$ konstant ist. (Wenn man $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\gamma$ als die disjunkte Vereinigung $U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_k$ von zusammenhängenden Mengen (vgl. Aufgabe 11 (a)) schreibt, dann nennt man die Mengen $U_1, \ldots, U_k$ die *Zusammenhangskomponenten* von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\gamma$.)

(b) Es seien $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z\}$ zwei geschlossene Wege, die in $\mathbb{C}\setminus\{z\}$ zueinander homotop sind. Zeigen Sie, dass gilt: $n_{\gamma_0}(z) = n_{\gamma_1}(z)$.

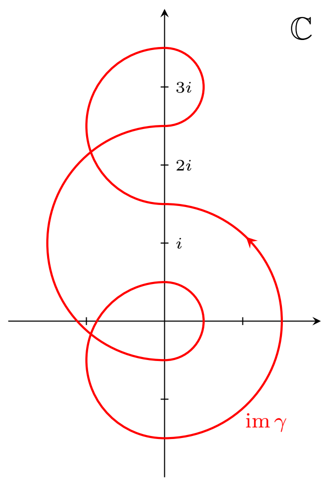
Aufgabe 18. *Bestimmung der Umlaufzahl.*

(a) (1 Punkt) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ wieder ein geschlossener Weg. Zeigen Sie: falls $R > 0$ mit $\operatorname{im}\gamma \subset \mathrm{B}_R(0)$ dann gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{B}_R(0)$, $n_\gamma(z) = 0$.

(b) (2 Punkte) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Es sei $\alpha\colon [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{C}$ ein Geradenstück, das $\operatorname{im}\gamma$ in genau einem Punkt z_0 in einem rechten Winkel schneidet, mit $\alpha(0) = z_0$ und so dass $\gamma^{-1}(z_0) = \{t_0\}$. Ferner nehme man an, dass $\angle(\gamma'(t_0), \alpha'(0)) = +\frac{\pi}{2}$. Zeigen Sie, dass gilt: $n_\gamma(\alpha(\epsilon)) = n_\gamma(\alpha(-\epsilon))+1$. Was gilt wenn $\angle(\gamma'(t_0), \alpha'(0)) = -\frac{\pi}{2}$?

Hinweis: Legen Sie dazu einen geeigneten Kreisweg um das Geradenstück, und modifizieren Sie den Weg γ so, dass das Geradenstück auf einer Seite des neuen Weges liegt.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Umlaufzahlen auf den Zusammenhangskomponenten (also z. B. an den Punkten $0, i, 2i, 3i$) von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\gamma$ im folgenden Beispiel:



Aufgabe 19. *Satz von Liouville.* Zeigen Sie:

(a) Ist f eine ganze, nicht konstante Funktion, dann ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$.

(b) Ist f eine doppeltperiodische ganze Funktion, dann ist f konstant. Dabei bedeutet *doppeltperiodisch*, dass es zwei komplexe Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ gibt (die "Perioden" von f), die über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, und f die Gleichungen $f(z+\omega_1) = f(z)$ und $f(z+\omega_2) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt.

Aufgabe 20. *Taylorreihen.* Berechnen Sie die Taylorreihen sowie deren Konvergenzradien

(a) von den ganzen Funktionen $\sin(z)$ und $\cos(z)$ um $z = 0$

(b) von $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z-1}$ um $z = -1$, um $z = \frac{1}{2}$ und um $z = 2$.