Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Funktionentheorie.html

Übungsblatt 4

Abgabetermin 10.06.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt und schicken Sie Ihre Abgabe per Email an Ihren Tutor.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 13. *Fundamentalgruppe.* Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Man betrachte die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Aufgabe 12: für zwei geschlossene Wege $\gamma, \widetilde{\gamma}$ in U mit Start- und Endpunkt $z_0 \in U$ schreibe man $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$ falls eine Homotopie zwischen geeigneten Umparametrisierungen von γ und $\widetilde{\gamma}$ existiert.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Verkettung von Wegen auf den Äquivalenzklassen wohldefiniert ist, also dass gilt: $\gamma_0 * \gamma_1 \sim \widetilde{\gamma}_0 * \widetilde{\gamma}_1$ falls $\gamma_0 \sim \widetilde{\gamma}_0$ und $\gamma_1 \sim \widetilde{\gamma}_1$.

Hinweis: Der Einfachheit halber bietet es sich an, alle Wege als Wege $[0,1] \to U$ umzuparametrisieren, so dass z. B. für die Verkettung von zwei Wegen $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to U$ gilt: $\gamma_0 * \gamma_1 \sim \gamma$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Menge der Äquivalenzklassen eine Gruppe bildet, wobei die Verknüpfung der Gruppe durch die Verkettung von Wegen gegeben ist und das Einheitselement e die Äquivalenzklasse des konstanten Wegs $[0,1] \to U$ mit $t \mapsto z_0$ ist. Diese Gruppe wird mit $\pi_1(U, z_0)$ bezeichnet und die *Fundamentalgruppe* von U genannt.

(c) (1 Punkt) Man nennt U *einfach zusammenhängend*, falls für irgendein $z_0 \in U$ gilt: $\pi_1(U, z_0) = \{e\}$. Zeigen Sie, dass jedes sternförmige Gebiet einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 14. *Eigenschaften von Gebieten II.* Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Für jeden Punkt $z \in U$ ist $U \setminus \{z\}$ wieder ein Gebiet.

(b) Wenn U sternförmig ist und $z \in U$, dann ist $U \setminus \{z\}$ ebenfalls sternförmig, möglicherweise bezüglich eines anderen Punktes in U.

(c) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist ein sternförmiges Gebiet.

(d) Wenn U einfach zusammenhängend ist, dann ist U sternförmig.

Aufgabe 15. *Existenz von Stammfunktionen.* Es sei $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$.

(a) Zeigen Sie, dass f holomorph ist, es für f aber keine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$ gibt.

(b) Sei $U \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet und $F\colon U \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion für $f|_U$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in U$ gilt: $(\exp \circ F)(z) = Cz$ für eine Konstante $C \in \mathbb{C}$. Insbesondere gibt es eine lokale Stammfunktion von f, die eine lokale Umkehrfunktion von $z \mapsto \exp(z)$ ist.

Aufgabe 16. *Schwarzsches Spiegelungsprinzip.* Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das symmetrisch bezüglich der reellen Achse $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist, und schreibe $U = U_+ \cup U_0 \cup U_-$, wobei

$$\begin{aligned} U_+ &= \{z \in U \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \\ U_0 &= \{z \in U \mid \operatorname{Im} z = 0\}, \\ U_- &= \{z \in U \mid \operatorname{Im} z < 0\}. \end{aligned}$$

Sei nun $f\colon U_+ \cup U_0 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf U_+ holomorph ist und auf U_0 reelle Werte annimmt, und definiere $\widetilde{f}\colon U \to \mathbb{C}$ durch

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in U_+ \cup U_0, \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{falls } z \in U_-. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) $\widetilde{f}$ ist auf U_- holomorph.

(b) (2 Punkte) $\widetilde{f}$ ist auf ganz U holomorph.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass Wegintegrale entlang Dreiecksrändern in U verschwinden, indem Sie Holomorphie auf U_+ und U_- sowie die Stetigkeit von f benutzen.

(c) (1 Punkt) Obwohl für f auf U_0 nur Stetigkeit vorausgesetzt wurde, ist die Funktion $f|_{U_0}\colon U_0 \to \mathbb{R}$ beliebig oft (reell) differenzierbar.