Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Funktionentheorie.html

Übungsblatt 3

Abgabetermin 03.06.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt und schicken Sie Ihre Abgabe per Email an Ihren Tutor.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 9. *Winkeltreue.* Wir betrachten die Funktionen $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ und $g(z) = \overline{z}^2$.

(a) Sei $w = a + ib \in \mathbb{C}$ und seien

$$H_b := \{x + ib \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$
$$V_a := \{a + iy \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

die horizontalen und vertikalen Geraden durch den Punkt w. Bestimmen Sie das Bild von H_b und V_a unter den Funktionen f und g. Welche Form nimmt das Bild jeweils? In welchem Winkel schneiden sich die Bilder von H_b und V_a unter f?

(b) Sei $w = a + ib$ mit $a, b \neq 0$ und R das Rechteck mit Eckpunkten $\pm w, \pm\overline{w}$. Machen Sie eine Zeichnung von dem Bild von R unter der Abbildung f und zeichnen Sie die Bilder der Eckpunkte ein.

Was ändert sich, wenn man statt f die Abbildung g betrachtet?

Aufgabe 10. *Wege und Wegintegrale.*

(a) (2 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma\colon [a, b] \to U$ sei ein Weg in U. Zeigen Sie:

(I)
$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

wobei $\gamma^-\colon [a, b] \to U$ mit $\gamma^-(t) := \gamma(a + b - t)$ der umgekehrt durchlaufene Weg zu γ ist.

(II) Falls $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ mit $\gamma_j\colon [a_j, b_j] \to U$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, dann gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

(Teile (I) und (II) entsprechen den Teilen (2) und (3) von Proposition 2.3 in der Vorlesung.)

(b) (1 Punkt) Parametrisieren Sie den Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, also den Rand der Einheitskreisscheibe, mit mathematisch positiver Umlaufrichtung und berechnen Sie

$$\int_{S^1} z^n \, dz$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(c) (1 Punkt) Finden Sie eine Stammfunktion für $\sin(\pi z)$ und berechnen Sie

$$\int_{S^1} \sin(\pi z) dz \quad \text{und} \quad \int_C \sin(\pi z) dz,$$

wobei C der obere Halbkreis von S^1 ist.

Aufgabe 11. *Eigenschaften von Gebieten.*

(a) Eine offene Menge U heißt *zusammenhängend* falls gilt: wenn $U = U_1 \cup U_2$ für zwei offene und disjunkte Mengen U_1, U_2 dann ist $U_1 = \varnothing$ oder $U_2 = \varnothing$. Zeigen Sie, dass jede wegzusammenhängende offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend ist.

(b) Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist *konvex* falls gilt: für alle Zahlen $z_0, z_1 \in U$ liegt die geradlinige Strecke von z_0 nach z_1 ebenfalls in U. Zeigen Sie, dass jede nicht-leere konvexe Menge U sternförmig ist.

Aufgabe 12. *Wege und Homotopien.* Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(a) Sei $\gamma_0 \colon [a, b] \to U$ ein Weg und $\gamma_1 \colon [a, b] \to U$ eine Umparametrisierung von γ_0. Dann existiert eine Homotopie in U zwischen γ_0 und γ_1.

(b) Für γ_0, γ_1 geschlossene Wege in U mit Start- und Endpunkt $z_0 \in U$ schreibe man $\gamma_0 \sim \gamma_1$ falls eine Homotopie zwischen geeigneten Umparametrisierungen von γ_0 und γ_1 existiert. Zeigen Sie: $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege in U mit Start- und Endpunkt z_0.