Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Funktionentheorie.html

Übungsblatt 2

Abgabetermin 27.05.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt und schicken Sie Ihre Abgabe per Email an Ihren Tutor.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 5. *Holomorphe Funktionen.* Zeigen Sie:

(a) Alle Polynome in einer komplexen Veränderlichen sind holomorph als Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(b) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, dann ist $f\colon \mathrm{D}_R(0) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ holomorph mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, wobei $\mathrm{D}_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

Aufgabe 6. *Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen.* Für $z \in \mathbb{C}$ setze man $\mathrm{e}^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ und

$$\sin(z) := \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}, \qquad \cos(z) := \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}.$$

Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) sin und cos sind ganze Funktionen, die auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt sind.

(b) (2 Punkte) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(c) (1 Punkt) Es gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ \mathrm{e}^{z} &= \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y), \text{ wobei } z = x + iy. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. *Dreiecksränder.* Es seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei komplexe Zahlen so dass $(z_2 - z_1, z_3 - z_1)$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ ist. Dann ist die Menge

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \text{ für } t_1, t_2, t_3 \in [0, \infty) \text{ mit } t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$$

ein Dreieck mit Eckpunkten z_1, z_2, z_3.

Schreibe $[z_1, z_2]$ für die Strecke von z_1 nach z_2 (das Bild von $[0, 1] \to \mathbb{C}$ mit $t \mapsto (1-t)z_1 + tz_2$). Dann ist der *Rand* von Δ

$$\partial\Delta = [z_1, z_2] * [z_2, z_3] * [z_3, z_1].$$

Sei Δ das Dreieck mit Eckpunkten $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ und $z_3 = i$. Berechnen Sie:

(a) $\int_{\partial\Delta} \operatorname{Re} z \, dz$

(b) $\int_{\partial\Delta} \operatorname{Im} z \, dz$

(c) $\int_{\partial\Delta} z \, dz$.

Aufgabe 8. *Invarianz des Integrals unter Umparametrisierung.* Seien $\gamma_1 \colon [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $s \colon [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ eine stetig (reell) differenzierbare Abbildung mit $s(a_2) = a_1$ und $s(b_2) = b_1$ und setze $\gamma_2 = \gamma_1 \circ s \colon [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für jedes auf einer offenen Umgebung von $\gamma_1([a_1, b_1])$ stetige f gilt:

$$\int_{\gamma_1} f(z) \, dz = \int_{\gamma_2} f(w) \, dw.$$