Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Funktionentheorie.html

Übungsblatt 11

Dieses Blatt wird nicht bewertet.

Aufgabe 41. *Möbiustransformationen.* Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sei $f_M \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ mit

$$(*) \qquad f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

die Möbiustransformation wie in Aufgabe 36.

(a) Es seien $z_0, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ drei paarweise verschiedene Punkte. Zeigen Sie: für jede weiteren drei paarweise verschiedenen Punkte $w_0, w_1, w_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ existiert eine Möbiustransformation mit $f(z_i) = w_i$ für $i = 0, 1, 2$.

Hinweis: Finden Sie zuerst eine Möbiustransformation für $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ und $w_2 = \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass f_M die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ auf sich selbst abbildet genau dann, wenn $M = \lambda N$ für eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und eine Matrix $N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.

(c) Welche Abbildung wird durch die Formel $(*)$ definiert, falls $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ eine 2×2 Matrix mit Rang 1 ist?

Aufgabe 42. *Residuen und die Cauchy'sche Integralformel.* Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Man schreibe $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dz^n}$.

(a) Falls z_0 ein Pol von f der Ordnung k ist, gilt:

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{\widetilde{f}^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!},$$

wobei $\widetilde{f} \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph sei mit $\widetilde{f}(z) = (z - z_0)^k f(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$.

(b) Folgern Sie aus dem Residuensatz, dass für jedes $z \in U$, jede in U nullhomologe Kette γ mit $\mathrm{im}\,\gamma \subset U \setminus \{z\}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = n_\gamma(z) f^{(n)}(z).$$

(Dies ist eine Verallgemeinerung von Bemerkung 9.5 in Teil I der Vorlesung vom 15. Juli.)

Aufgabe 43. *Die Ordnung im Unendlichen.*

(a) Es sei $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemann'sche Zahlensphäre und $\bar{f} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion, d.h. $f := \bar{f}|_{\mathbb{C}}$ und $f^\vee$ sind meromorphe Funktionen $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$, wobei $f^\vee(w) = f(\frac{1}{w})$.

Zeigen Sie, dass die Rechenregeln für meromorphe Funktionen f, g mit $f \not\equiv 0$ und $g \not\equiv 0$ auch für die Ordnung im Unendlichen $\nu_\infty(\bar{f}) = \nu_\infty(f) := \nu_0(f^\vee)$ gelten:

$$\begin{aligned} \nu_\infty(f+g) &= \min\{\nu_\infty(f), \nu_\infty(g)\}, \qquad \text{falls } \nu_\infty(f) \neq \nu_\infty(g) \\ \nu_\infty(f \cdot g) &= \nu_\infty(f) + \nu_\infty(g) \\ \nu_\infty(f/g) &= \nu_\infty(f) - \nu_\infty(g). \end{aligned}$$

Was kann mit $\nu_{z_0}(f+g)$ passieren, falls $\nu_{z_0}(f) = \nu_{z_0}(g)$?

(b) Zeigen Sie: wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion ist mit einem Pol der Ordnung n im Unendlichen, dann ist $f(z)$ ein Polynom vom Grad n.

Aufgabe 44. *Stereographische Projektionen.* Es seien $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^2$ die Riemann'sche Zahlensphäre und $\sigma : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ und $\sigma^\vee : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{C}$ die stereographischen Projektionen wie in Bemerkung 10.3.

(a) Betrachten Sie $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{C}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\} \\ \mathbb{C} &= \{x_1 + ix_2 \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \simeq \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

und geben Sie Formeln für σ und $\sigma^\vee$, wobei $N = (0, 0, 1)$ und $S = (0, 0, -1)$.

Hinweis: Beachten Sie, dass im Bild von $\sigma^\vee$ „von unten" auf $\mathbb{C}$ projiziert wird, so dass z. B. $\sigma^\vee((x_1, x_2, 0)) = x_1 - ix_2$, wenn $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ gilt: $\sigma(p) \cdot \sigma^\vee(p) = 1$, wobei $\cdot$ das Produkt von komplexen Zahlen bezeichnet.