Übungsblatt 10

Abgabetermin 22.07.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt und schicken Sie Ihre Abgabe per Email an Ihren Tutor.
*Für jede der vier Aufgaben gibt es auf diesem Blatt **5 Punkte**, so dass auf diesem Blatt **4 Bonuspunkte** vergeben werden.*
Dieses Blatt ist das letzte bewertete Blatt. (Die „Gesamtpunktezahl“ wird aus 160 Punkten errechnet. Verfügbar sind insgesamt 164 Punkte.)

Aufgabe 37. *Möbiustransformationen.* Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

eine invertierbare Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}$. Die meromorphe Funktion $f_M\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ gegeben durch

$$(*) \qquad f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

wird *Möbiustransformation* genannt.

Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) $(f_M \circ f_N)(z) = f_{MN}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $f_N(z) \in \mathbb{C}$, wobei mit MN das Produkt der Matrizen M, N in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gemeint ist.

(b) (2 Punkte) f_M lässt sich zu einer bijektiven Abbildung $\bar{f}_M\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen, indem man setzt:

$$\bar{f}_M(z) = \begin{cases} f_M(z) & \text{falls } z \in \mathbb{C} \\ \dfrac{a}{c} & \text{falls } z = \infty \text{ und } c \neq 0 \\ \infty & \text{falls } z = \infty \text{ und } c = 0. \end{cases}$$

(Wie wir später sehen werden, ist die Abbildung $\bar{f}_M$ tatsächlich eine *biholomorphe* Abbildung von $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich selbst. Häufiger werden die Abbildungen $\bar{f}_M$ mit $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auch Möbiustransformationen genannt.)

(c) (1 Punkt) Falls $f_M = f_N$, dann gilt: es existiert ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass $M = \lambda N$.

(d) (1 Punkt) Die Funktion ϕ_a aus Aufgabe 35 lässt sich als die Einschränkung $f_M|_{\mathrm{D}_1(0)}$ einer Möbiustransformation f_M schreiben. Wo liegen die Polstellen von f_M?

Aufgabe 38. *Definition und Beispiele von Residuen.*

(a) (3 Punkte) Man erinnere sich, dass für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ das *Residuum* von f in z_0 definiert ist als

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathrm{B}_\delta(z_0)} f(z)dz$$

wobei $\delta > 0$ so dass $\mathrm{B}_\delta(z_0) \subset U$.

Zeigen Sie, dass $\operatorname{res}_{z_0}(f)$ unabhängig von δ ist und somit das Residuum wohldefiniert ist.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Residuen $\operatorname{res}_{z_0}(f)$ für folgende Funktionen und singuläre Punkte z_0:

- $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+1}$, für $z_0 = i$ und für $z_0 = -i$
- $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-i)}$, für $z_0 = i$ und für $z_0 = -i$.

Aufgabe 39. *Residuen und Singularitäten.* Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass $a_{-1} := \operatorname{res}_{z_0}(f)$ die eindeutig bestimmte komplexe Zahl ist, für die gilt: die Funktion

$$z \mapsto f(z) - \frac{a_{-1}}{z - z_0}$$

besitzt in einer in z_0 punktierten Umgebung von z_0 eine Stammfunktion. (Dies ist der Beweis von Satz 9.2 (2).)

Aufgabe 40. *Integrale und der Residuensatz.*

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\lambda x}}{x^2+4} dx$$

für alle reellen Zahlen $\lambda > 0$.

Hinweis: Berechnen Sie dazu zunächst

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{i\lambda z}}{z^2+4} dz,$$

wobei $\Gamma_R = [-R, R] * \widetilde{\Gamma}_R$ und $\widetilde{\Gamma}_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$ der Halbkreisbogen $\widetilde{\Gamma}_R(t) = R\mathrm{e}^{it}$ ist.

(b) (2 Punkte) Verwenden Sie das Resultat aus (a), um den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2+4} dx$$

zu bestimmen.

Hinweis: $\operatorname{Im}\left(\frac{d}{d\lambda} \mathrm{e}^{i\lambda x}\right) = x \sin(x)$.