Funktionentheorie
Sommersemester 2020

Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Severin Barmeier

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mathphys/lehre/SoSe20/Funktionentheorie.html

Übungsblatt 1

Abgabetermin 20.05.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt und schicken Sie Ihre Abgabe per Email an Ihren Tutor.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1. *Komplexe Zahlen.*

(a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\Big(\frac{1+2i}{3-4i}\Big)^3, \qquad (1+i)^{13}, \qquad \sum_{k=1}^{8}\Big(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big)^k.$$

(b) Sei $a \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl in der komplexen Zahlenebene. Welche komplexen Zahlen erhält man durch die Spiegelung in den Geraden $x + ix$ und $x - ix$, $x \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 2. *Formel von Moivre.* Es sei $\phi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^m = \cos(m\phi) + i\sin(m\phi).$$

Benutzen Sie dafür nicht die Eulersche Formel $\mathrm{e}^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ sondern vollständige Induktion.

Aufgabe 3. *Einheitswurzeln.* Es sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $p \in \mathbb{C}[z]$ mit $p(z) = z^m - 1$. Eine komplexe Zahl ζ heißt *m-te Einheitswurzel* falls ζ eine Nullstelle von p ist. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau m verschiedene m-te Einheitswurzeln, nämlich $\zeta_k := \cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m}$ für $k \in \{0, \dots, m-1\}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\zeta_k = 0$ und $\displaystyle\prod_{k=0}^{m-1}\zeta_k = (-1)^{m+1}$.

Hinweis: Benutzen Sie dazu Aufgabe 2.

Aufgabe 4. *Quadratwurzel.* Es sei $\sqrt{}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Umkehrfunktion von $z \mapsto z^2$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) (3 Punkte) Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von $f(z)$ als Funktion von x und y. Setzen Sie dazu $f(z) = u + iv$ und bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $(u + iv)^2 = x + iy$.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u + iv = f\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$. Drücken Sie sowohl das Argument als auch die Werte von f durch Polarkoordinaten aus und vergleichen Sie zu Aufgabe 3 (a).