Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 9

37. Residuen

    Es sei U ein Gebiet, $z_0 \in U$, und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das Residuum $\mathrm{res}_{z_0} f$ die eindeutig bestimmte Zahl $c \in \mathbb{C}$ ist, so dass die Funktion $z \mapsto f(z) - \frac{c}{z-z_0}$ in einer in z_0 punktierten Umgebung von z_0 eine Stammfunktion besitzt.

    (b) (2 Punkte) Es sei z_0 ein Pol der Ordnung k. Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{res}_{z_0} f = \frac{\widetilde{f}^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$ mit $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$ und $\widetilde{f}(z) = (z-z_0)^k f(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$.

38. Bestimmung von Residuen

    Bestimmen Sie $\mathrm{res}_{z_0} f$ für folgende Funktionen f und singulären Punkte z_0:

    (a) (1 Punkt) $f(z) = \exp(\frac{1}{z}) - \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$,

    (b) (1 Punkt) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-i)^3}$, $z_0 = i$ und $z_0 = -i$,

    (c) (1 Punkt) $f(z) = \Gamma(z)$, $z_0 = -n, n \in \mathbb{N}$,

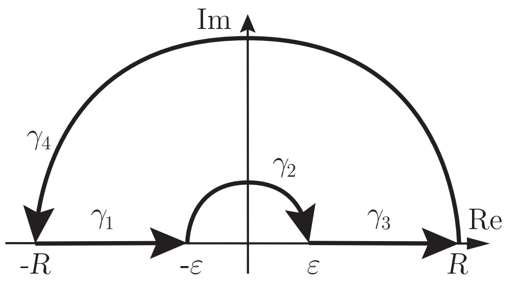
    (d) (1 Punkt) $f(z) = \frac{z}{(z+1)\sin(\pi z^n)}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $z_0 = 0$ und $z_0 = -1$.

39. Dirichlet'sches Integral

    (4 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Betrachten Sie dazu das Wegintegral der Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{\exp(iz)}{z}$ entlang des geschlossenen Weges $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$ im nebenstehenden Schaubild.



Zeigen Sie dazu, dass

$$\left| \int_{\gamma_4} f(\zeta) \mathrm{d}\zeta \right| \leq \frac{\pi}{R} \left(1 - \mathrm{e}^{-R}\right) \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_2} f(\zeta) \mathrm{d}\zeta = -\pi i + \int_{\gamma_2} \frac{\exp(i\zeta) - 1}{\zeta} \mathrm{d}\zeta.$$

40. Holomorphe Fortsetzung und Homotopie

Es seien U ein Gebiet, $\gamma : [0,1] \to U$ ein Weg, und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) (1 Punkt) Es seien F_0 eine Stammfunktion von $f|_{U_0}$ in einer Umgebung U_0 von $\gamma(0)$, $F_1 := F_0^\gamma$ die holomorphe Fortsetzung von F_0 längs γ wie in Aufgabe 36. Wir definieren $\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F_1(\gamma(1)) - F_0(\gamma(0))$. Zeigen Sie, dass dieses Wegintegral nicht von der Wahl von F_0 abhängt.

(b) (1 Punkt) Es sei γ geschlossen, und es existiere die holomorphe Fortsetzung f^γ von f entlang γ in eine offene Umgebung von $\gamma(1)$. Zeigen Sie, dass gilt: Ist γ nullhomotop, so ist $f^\gamma|_{\widetilde{U}} = f|_{\widetilde{U}}$ in einer Umgebung $\widetilde{U}$ von $\gamma(0) = \gamma(1)$.

(c) (2 Punkte) Es seien nun $U_i \subset U$ offene Umgebungen von $\gamma(i)$, $i \in \{0,1\}$, und f nicht konstant. Weiter sei $V_i = f(U_i)$, $i \in \{0,1\}$, und $g : V_0 \to \mathbb{C}$ holomorph. Dabei existiere die holomorphe Fortsetzung $g^{f\circ\gamma}$ von g längs $f \circ \gamma$ nach V_1. Zeigen Sie, dass eine holomorphe Fortsetzung $(g \circ f)^\gamma$ von $g \circ f$ längs γ nach U_1 existiert, und dass dann gilt: $g^{f\circ\gamma} \circ f|_{\widetilde{U}} = (g \circ f)^\gamma|_{\widetilde{U}}$ in einer Umgebung $\widetilde{U}$ von $\gamma(0)$.

Abgabetermin: Dienstag, 26. Juni 2018 um 12 Uhr