Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 8

33. Gamma–Funktion

Es sei $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Für $z \in U$ definieren wir die Gamma–Funktion durch $\Gamma(z) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (1 Punkt) Das Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$ konvergiert absolut für $\operatorname{Re} z > 0$.
Betrachten Sie die Integrale $\int_0^1$ und $\int_1^\infty$ getrennt.

(b) (1 Punkt) Die Funktion $\Gamma : U \to \mathbb{C}, z \mapsto \Gamma(z)$ ist holomorph.
Betrachten Sie dazu $f_n(z) := \int_{\frac{1}{n}}^n \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(c) (1 Punkt) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für alle $z \in U$.

(d) (1 Punkt) Es existiert eine eindeutige holomorphe Fortsetzung $\Gamma : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ der Funktion $\Gamma(z)$.
Zeigen Sie zuerst, dass eine eindeutige holomorphe Fortsetzung auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1, z \neq 0\}$ existiert.

34. Meromorphe Funktionen

(a) (2 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M}(U)$ der meromorphen Funktionen auf U ein Körper ist.

(b) (1 Punkt) Es seien $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, also $f, g : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph, und $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $f(z) = \lambda g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass $|f'(z)| \leq |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

35. Wesentliche Singularitäten

(a) (2 Punkte) Es sei $f : D_{1,0}(a) \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, holomorph und habe eine wesentliche Singularität in a. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein $z_n \in D_{\frac{1}{n},0}(a)$ existiert, so dass gilt: $|(z_n - a)^n f(z_n)| \geq n$.

(b) (2 Punkte) Es sei $f : D_{1,0}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass $z^2 f'(z) = (f(z))^2 + z$ für alle $z \in D_{1,0}(0)$. Zeigen Sie, dass f eine wesentliche Singularität in 0 besitzt.

36. Holomorphe Fortsetzung entlang Wegen

Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg, $(D_0, \ldots, D_n)$ eine Kreiskette wie in Aufgabe 26. Wir sagen, dass die Kreiskette längs γ verläuft, falls es eine Unterteilung $0 = t_0 \leq \cdots \leq t_n = 1$ gibt, so dass $\gamma(t_i)$ Mittelpunkt von D_i ist und $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]} \subset D_{i-1} \cap D_i$. Es sei $f : D_0 \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir sagen, dass $f_n : D_n \to \mathbb{C}$ durch holomorphe Fortsetzung längs γ entsteht, falls es eine holomorphe Fortsetzung f_n von f längs einer Kreiskette $(D_0, \ldots, D_n)$ wie in Aufgabe 26 gibt, die längs γ verläuft.

(a) (1 Punkt) Es seien $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg, K_i eine offene Kreisscheibe um $\gamma(i)$, $i \in \{0,1\}$. Es seien $f : K_0 \to \mathbb{C}$ holomorph, $g, \widetilde{g} : K_1 \to \mathbb{C}$ holomorphe Fortsetzungen von f längs beliebiger, aber verschiedener Kreisketten längs γ. Zeigen Sie, dass $g = \widetilde{g}$.

Wir bezeichnen die holomorphe Fortsetzung von f längs γ mit $f^\gamma := g$.

(b) (3 Punkte) Es seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma_0(i) = \gamma_1(i) = z_i$, $i \in \{0,1\}$. Es sei $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Homotopie von γ_0 nach γ_1. Es sei U_0 eine Umgebung von z_0. Schliesslich sei $f : U_0 \to \mathbb{C}$ holomorph und es gibt eine Umgebung U_1 von z_1, so dass f entlang jedes Weges $\gamma_s(t) = \Phi(s,t)$ holomorph fortsetzbar nach U_1 ist. Zeigen Sie, dass gilt: $f^{\gamma_0}(z) = f^{\gamma_1}(z)$ für alle $z \in U_1$.

Betrachten Sie dazu $S = \{s \in [0,1] \mid f^{\gamma_s}|_{U_1} = f^{\gamma_0}|_{U_1}\}$ und zeigen Sie, dass S sowohl offen als auch abgeschlossen in $[0,1]$ ist. Betrachten Sie dazu das Urbild einer Kreiskette unter Φ, welche zwei nahe beieinanderliegende Wege überdeckt.

Abgabetermin: Dienstag, 19. Juni 2017 um 12 Uhr