Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 18

Übungsblatt 7

29. Biholomorphe Abbildungen der Einheitskreisscheibe

   (a) (1 Punkt) Es sei $f : D_1(0) \to D_1(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass gilt: $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D_1(0)$.
   Betrachten Sie dazu die Funktion $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, $z \neq 0$, $g(0) = f'(0)$, und wenden das Maximumprinzip an.

   (b) (1 Punkt) Es sei $\varphi : D_1(0) \to D_1(0)$ eine biholomorphe Funktion mit $\varphi(0) = 0$. Zeigen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (a), dass gilt: Es existiert ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ so, dass $\varphi(z) = \zeta z$ für alle $z \in D_1(0)$.

   (c) (1 Punkt) Es sei $a \in D_1(0)$. Zeigen Sie, dass $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ eine biholomorphe Abbildung $\varphi_a : D_1(0) \to D_1(0)$ definiert, so dass gilt: $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_a(0) = a$ und $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$. Benutzen Sie dazu die Resultate aus Aufgabe 8.

   (d) (1 Punkt) Es sei $\varphi : D_1(0) \to D_1(0)$ eine biholomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass dann ein $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$, und ein $a \in D_1(0)$ existieren, so dass $\varphi(z) = \zeta\varphi_a(z)$ für alle $z \in D_1(0)$.

30. Nicht hebbare und wesentliche Singularitäten

   (4 Punkte) Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, und $f : D_{r,0}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Die Singularität von f in z_0 sei nicht hebbar. Zeigen Sie, daß dann $g := \exp \circ f$ eine wesentliche Singularität in z_0 besitzt.

   Zeigen Sie dazu zunächst, dass g in z_0 keine hebbare Singularität hat, indem Sie für die Singularität von f in z_0 eine Fallunterscheidung machen.

31. Quantitative Charakterisierung der Singularitäten

   (a) (2 Punkte) Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, und $f : D_{r,0}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, mit Laurentreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$. Zeigen Sie, daß f in z_0 genau dann

      i. eine hebbare Singularität hat, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$,

ii. einen Pol der Ordnung $k > 0$ hat, wenn $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$,

iii. eine wesentliche Singularität hat, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C}^* \to D_{1,0}(0)$ konstant ist.

Diskutieren Sie dazu die möglichen Singularitäten von f in 0.

32. Laurentreihenentwicklungen

Geben Sie den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung von

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)\sin(\pi z^n)}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

und den jeweiligen Typ der Singularität in

(a) (2 Punkte) $D_{1,0}(0)$

(b) (2 Punkte) $D_{1,0}(-1)$

an.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 22.

Abgabetermin: Dienstag, 12. Juni 2017 um 12 Uhr