Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 5

21. Ganze Funktionen

    (a) (2 Punkte) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie, dass gilt: Ist f nicht konstant, dann ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h. $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ und $D_1(0)$ nicht biholomorph äquivalent sind, d.h. es gibt keine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to D_1(0)$, so dass f bijektiv und f^{-1} holomorph ist. Geben Sie jedoch eine reell–analytische Funktion $g : \mathbb{C} \to D_1(0)$ und ihre Umkehrfunktion an.

22. Rechnen mit Potenzreihen

    Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe, die in $D_R(0)$, $R > 0$, konvergiert.

    (a) (1 Punkt) Es sei $a_0 \neq 0$. Geben Sie die ersten drei Koeffizienten der Reihenentwicklung von $\frac{1}{f(z)}$ an.

    (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe von $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ um $z = 0$ sowie die ersten drei Koeffizienten der Reihenentwicklung.

    (c) (1 Punkt) Es sei $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$. Wir nehmen an, es existiere eine Umkehrfunktion $g : D_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$, $0 < \varepsilon < R$, so dass $f(g(w)) = w$ und $g(f(z)) = z$ für alle $z, w \in D_\varepsilon(0)$. Geben Sie die ersten drei nichtverschwindenden Koeffizienten der Reihenentwicklung von $g(w)$ an.

    (d) (1 Punkt) Es sei $\lambda(z)$ die Umkehrfunktion von exp in einer Umgebung von $z = 1$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe von $\lambda(z)$ um $z = 1$ sowie alle Koeffizienten der Reihenentwicklung. Betrachten Sie dazu die Ableitung $\lambda'(z)$.

23. Konvergenz

    Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen absolut und lokal gleichmässig konvergieren. Dabei bezeichne $\sum_{p\in\mathbb{P}}$ die Summation über die Menge der Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge.

(a) (1 Punkt) $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $\operatorname{Re} s > 1$.

(b) (2 Punkte) $\Phi(s) := \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^s}$ für $\operatorname{Re} s > 1$.

(c) (1 Punkt) $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$ für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Es dürfen die aus der Analysis bekannten Eigenschaften des reellen Logarithmus verwendet werden.

24. Eigenschaften holomorpher Funktionen auf Kreisscheiben

Es seien $U \subset \mathbb{C}$, $c \in U$, $D_r(c) \subset U$, $r > 0$, und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) (2 Punkte) Es gelte $\min_{z\in\partial B_r(c)} |f(z)| > |f(c)|$. Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle in $D_r(c)$ besitzt. Betrachten Sie dazu das Maximumprinzip für $1/f$.

(b) (1 Punkt) Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ eine konvergente Potenzreihe in $D_r(c)$ mit Konvergenzradius $R > r$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + r\mathrm{e}^{i\varphi})\mathrm{e}^{-in\varphi}\mathrm{d}\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(c) (1 Punkt) Es sei $M(r) := \max_{|z-c|=r} |f(z)|$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + r\mathrm{e}^{i\varphi})|^2 \mathrm{d}\varphi \le M(r)^2.$$

Abgabetermin: Dienstag, 29. Mai 2017 um 12 Uhr