Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 18

Übungsblatt 4

17. Eigenschaften der Umlaufzahl

    (a) (2 Punkte) Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}\gamma \to \mathbb{C}$, $z \mapsto n_\gamma(z)$ lokal konstant ist.

    (b) (2 Punkte) Es seien $z \in \mathbb{C}$, $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{z\}$ geschlossene Wege, die in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ homotop zueinander sind. Zeigen Sie, dass gilt: $n_{\gamma_0}(z) = n_{\gamma_1}(z)$.

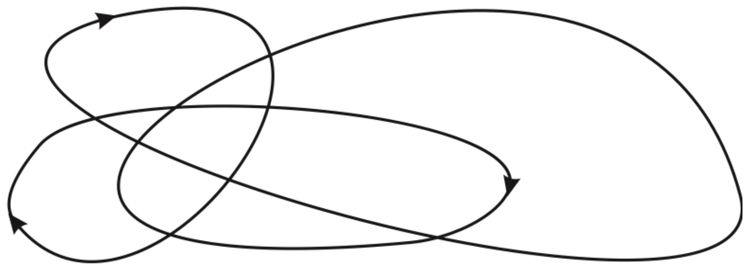
18. Bestimmung der Umlaufzahl

    (a) (1 Punkt) Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Zeigen Sie, dass gilt: $\lim_{z\to\infty} n_\gamma(z) = 0$.

    (b) (1 Punkt) Es seien $z \in \mathbb{C}$, $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C} \setminus \{z\}$, $i \in \{1, 2\}$, geschlossene Wege mit $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$. Zeigen Sie, dass gilt: $n_{\gamma_1 * \gamma_2}(z) = n_{\gamma_1}(z) + n_{\gamma_2}(z)$.

    (c) (1 Punkt) Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener, einmal durchlaufener, also injektiver Weg mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Es sei $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, ein Geradenstück mit $\mathrm{im}\gamma \cap \mathrm{im}\alpha = \{z\}$ für genau ein $z \in \mathbb{C}$ und $\sphericalangle(\gamma'(t_0), \alpha'(0)) = \frac{\pi}{2}$, wobei t_0 so gewählt ist, dass $\gamma(t_0) = \alpha(0) = z$. Zeigen Sie, dass gilt: $n_\gamma(\alpha(\varepsilon)) = n_\gamma(\alpha(-\varepsilon)) + 1$. Was gilt, wenn $\sphericalangle(\gamma'(t_0), \alpha'(0)) = -\frac{\pi}{2}$?
    Legen Sie dazu einen geeigneten Kreisweg um das Geradenstück, und modifizieren Sie den Weg γ so, dass das Geradenstück auf einer Seite des neuen Weges liegt.

    (d) (1 Punkt) Geben Sie die Umlaufzahlen des skizzierten Weges γ in jedem Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}\gamma$ an.



19. Homotopie von Wegen

   (a) (2 Punkte) Es seien $\gamma_a = \gamma$ mit γ aus Aufgabe 15(a), $\gamma_b = \gamma_1 * \gamma_2$ mit γ_1, γ_2 aus Aufgabe 15(b), $\gamma_c = \gamma_1 * \gamma_2$ mit γ_1, γ_2 aus Aufgabe 15(c). Zeigen Sie, dass γ_a, γ_b und γ_c homotop in $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ zueinander sind.

   (b) (2 Punkte) Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, und $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C} \setminus \{z_i\}$, geschlossene Wege mit $n_{\gamma_i}(z_i) = 1$, $i \in \{1, 2\}$ und $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$. Wir setzen $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_1^- * \gamma_2^-$. Skizzieren Sie den Weg γ und bestimmen Sie $n_\gamma(z_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Ist γ homotop in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ zum konstanten Weg (ohne Beweis) ?

20. Komplexe Integrale

   Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a) (3 Punkte) $\int_{\gamma_i} \frac{\exp(\zeta^2)}{\zeta^3 - 12\zeta^2 + 36\zeta} \mathrm{d}\zeta$ für $\gamma_i = \partial B_{R_i}(2)$ mit $R_i = 2i - 1$ für $i = 1, 2, 3$.

   (b) (1 Punkt) $\int_\gamma \frac{1}{\zeta^2 - 1} \mathrm{d}\zeta$ für $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$ mit

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}] \to \mathbb{C}, t \mapsto \sqrt{2} - \exp(-it), \\
\gamma_2 &: [0, 2] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(-\tfrac{i\pi}{4}) - t\tfrac{1-i}{\sqrt{2}}, \\
\gamma_3 &: [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}] \to \mathbb{C}, t \mapsto -\sqrt{2} + \exp(it), \\
\gamma_4 &: [0, 2] \to \mathbb{C}, t \mapsto -\exp(\tfrac{i\pi}{4}) + t\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

   Verwenden Sie dazu die Partialbruchzerlegung für Ausdrücke der Form $\frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{C}[z], p \neq 0$, d.h. für $p = A\prod_{i=1}^k (z - z_i)^{n_i}$ setzen Sie $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{ij}}{(z-z_i)^j}$ mit $a_{ij} \in \mathbb{C}$ an und bestimmen Sie die a_{ij}.

Abgabetermin: Dienstag, 15. Mai 2017 um 12 Uhr