Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 18

# Übungsblatt 3

13. Eigenschaften der Exponentialfunktion

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus aus Aufgabe (a) nicht injektiv ist und bestimmen Sie dessen Kern.

   (c) (2 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

      i. $f(z) = a\exp(bz)$ für alle $z \in U$ mit Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$.

      ii. $f'(z) = bf(z)$ für alle $z \in U$ mit einer Konstanten $b \in \mathbb{C}$.

14. Komplexe Wegintegrale

   Es sei $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, eine stetige Funktion.

   (a) (2 Punkte) Es seien $\gamma : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\mathrm{im}\gamma \subset U$, sowie $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$, ($a_i < b_i, i \in \{1, 2\}$), eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi(a_1) = a_2, \varphi(b_1) = b_2$. Zeigen Sie, dass gilt: $\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma\circ\varphi} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.

   (b) (1 Punkt) Es seien $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$ Wege mit $\mathrm{im}\gamma_i \subset U$, $i \in \{1, 2\}$, und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Zeigen Sie, dass für den Weg $\gamma_1 * \gamma_2$ gilt:

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{\gamma_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\,.$$

   (c) (1 Punkt) Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\mathrm{im}\gamma \subset U$. Zeigen Sie, dass für den umgekehrt durchlaufenen Weg $\gamma^-$ gilt: $\int_{\gamma^-} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = -\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.

15. Berechnung von Wegintegralen

   (a) (1 Punkt) Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ Wege, welche die vier Kanten des Quadrates mit Eckpunkten $1, i, -1, -i$ beschreiben, also $\mathrm{im}\gamma_1 = [1, i], \mathrm{im}\gamma_2 = [i, -1], \mathrm{im}\gamma_3 = [-1, -i], \mathrm{im}\gamma_4 = [-i, 1]$, und zwar so, dass $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$ wohldefiniert und geschlossen ist. Berechnen Sie $\int_{\gamma_i} \frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$, $i \in \{1, \ldots, 4\}$, und $\int_\gamma \frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$. Besitzt $\frac{1}{z^2}$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$ ?

(b) (1 Punkt) Es seien $\gamma_1 : [-1,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto t - it$, und $\gamma_2 : [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \to \mathbb{C}, t \mapsto \sqrt{2}\exp(it)$. Berechnen Sie $\int_{\gamma_i} |\zeta| \, d\zeta$ für $i \in \{1,2\}$. Besitzt $|z|$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$ ?

(c) (1 Punkt) Es seien $\gamma_1 : [-\pi, 0] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$ und $\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$. Berechnen Sie $\int_{\gamma_i} \frac{1}{\zeta} d\zeta$, $i \in \{1,2\}$. Besitzt $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$ ?

(d) (1 Punkt) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \exp(it)$. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{\sin\zeta}{\zeta} d\zeta$.

16. Sternförmige Gebiete
Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind Gebiete bzw. sternförmige Gebiete ? (Antwort mit Beweis.)

(a) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 2| < 2\}$.

(b) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 2| < 3\}$.

(c) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$.

(d) (1 Punkt) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, |z-2| > \sqrt{5}\}$.

Abgabetermin: Dienstag, 8. Mai um 12:00 Uhr