Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 2

9. Komplexe Differenzierbarkeit

   Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & \text{falls } z \neq 0, \\ 0 & \text{falls } z = 0. \end{cases}$

   (a) (1 Punkt) Besitzt die Einschränkung von f auf $x \in \mathbb{R}$ eine Taylor–Entwicklung in 0 (mit Beweis) ?

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß f für alle $z \in \mathbb{C}$ die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt und für alle $z \in \mathbb{C}^*$ komplex differenzierbar ist, aber nicht im Nullpunkt.

   (c) (1 Punkt) Es sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad n, d.h. $p = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Zeigen Sie, daß p für alle $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, und dass gilt: $p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$.

10. Lokal konstante holomorphe Funktionen
    (4 Punkte) Es sei f überall in U komplex differenzierbar, $U \subset \mathbb{C}$ offen. Es gelte eine der folgenden Bedingungen:

    (a) $\operatorname{Re} f$ ist konstant.

    (b) $\operatorname{Im} f$ ist konstant.

    (c) $|f|$ ist konstant.

    (d) $\arg f$ ist konstant, wobei $\arg : \mathbb{C} \to (-\pi, \pi]$ durch die Darstellung $f = |f| \exp(i \arg f)$ definiert sei.

    Zeigen Sie, daß gilt: f ist lokal konstant in U, d.h. $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$.

11. Winkelerhaltung von holomorphen Funktionen

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß es zu jedem Paar $(z, w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ genau eine reelle Zahl $\theta := \theta(z, w) \in (-\pi, \pi]$ gibt, so daß $\cos\theta = \frac{\langle z,w \rangle}{|z|\,|w|}$ und $\sin\theta = \frac{\langle iz,w \rangle}{|z|\,|w|}$, wobei $\langle z, w \rangle := \operatorname{Re} z\bar{w}$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}$ ist. θ heisst der orientierte Winkel zwischen z und w und wird mit $\sphericalangle(z, w)$ bezeichnet.

(b) (3 Punkte) Es sei f überall in U komplex differenzierbar, $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$, mit $f'(a) \neq 0$. Weiter seien $\gamma_i : [-1,1] \to U$, $i = 1,2$, zwei Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ und $\gamma_i'(t) \neq 0$ für alle $t \in [-1,1]$. Es sei $\sphericalangle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ der orientierte Schnittwinkel der beiden Kurven im Punkt a. Zeigen Sie, daß für den orientierten Schnittwinkel θ der beiden Bildkurven $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ im Bildpunkt $f(\gamma_1(0)) = f(\gamma_2(0)) = f(a)$ gilt: $\theta = \sphericalangle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$.

12. Cayley–Abbildung
Es seien $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$ wie in Aufgabe 8. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{E}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}\,.$$

Diese Abbildung heisst Cayley–Abbildung.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß f eine winkelerhaltende Abbildung ist. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Bild unter f von $\partial\mathbb{H}$, d. h. vom Rand von $\mathbb{H}$.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß für die Geraden $G_x = \{x + it \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}, x \in \mathbb{R}$, gilt: $f(G_x)$ liegt auf einem Kreisbogen oder auf einer Geraden.

(d) (1 Punkt) Die Gerade G_x schneidet den Rand $\partial\mathbb{H}$ im Punkt $z = x$. Bestimmen Sie den orientierten Schnittwinkel von $f(G_x)$ und $f(\partial\mathbb{H})$ im Punkt $f(x)$.