Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 18

Übungsblatt 12

49. Weierstrass-Probleme

    (a) Zeigen Sie:
    $$\cos \pi z = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right)$$
    Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des Sinus als Lösung des Weierstrass-Problems.

    (b) Zeigen Sie:
    $$e^z - 1 = e^{z/2} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)$$
    Hinweis: Zeigen Sie, dass $e^z - 1 = -2ie^{z/2}\sin(iz/2)$.

50. Anwendung des Weierstrass-Problems

    Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass eine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g^n = f$ existiert genau dann, wenn $\nu_z(f)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ durch n teilbar ist.

51. Existenz einer Stammfunktion

    Zeigen Sie, dass die Funktion
    $$f(z) = \frac{z}{(z^7 - 1)(z^2 + 1)}$$
    in $D_{\infty,2}(0)$ eine Stammfunktion besitzt.

52. Möbius-Transformationen und biholomorphe Automorphismen von $\mathbb{C}^*$

    (a) Zeigen Sie, dass $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ genau dann eine bijektive meromorphe Funktion ist, wenn f eine Möbius-Transformation ist, d.h.
    $$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$
    mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, so dass $ad - bc \neq 0$.

(b) Es sei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ biholomorph. Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ existiert, so dass $f(z) = \lambda z$ oder $f(z) = \frac{\lambda}{z}$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass sich f zu einer bijektiven meromorphen Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt.

Abgabetermin: Dienstag, 17. Juli 2018 um 12 Uhr