PROF. KATRIN WENDLAND
PD EMANUEL SCHEIDEGGER, DR. SANTOSH KANDEL
MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT FREIBURG

Übungsblatt 11

45. Mittag-Leffler-Probleme

    (a) Zeigen Sie:

    $$\pi \tan \pi z = 8z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 4z^2}.$$

    Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des Kotangens als Lösung des Mittag-Leffler-Problems.

    (b) Zeigen Sie:

    $$\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}.$$

    Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des Kotangens als Lösung des Mittag-Leffler-Problems.

46. Meromorphe Funktionen und teilerfremde, ganze Funktionen

    (a) Bestimmen Sie eine meromorphe Funktion f, die in jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine einfache Polstelle mit $\mathrm{res}_n f = \sqrt{n}$ hat und in $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ holomorph ist.

    (b) Seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganze Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen. Zeigen Sie, dass dann ganze Funktionen $a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existieren, so dass $af + bg = 1$.

    Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Mittag-Leffler, dass es eine meromorphe Funktion A gibt, die Pole genau bei den Nullstellen von g hat, so dass der Hauptteil von A um jede Nullstelle von g der gleiche ist wie der Hauptteil von $\frac{1}{fg}$ um diese Nullstelle.

47. Explizite Formel für die Umkehrfunktion

Es seien $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $r > 0$ und $a \in U$ so dass $B_r(a) \subset U$, und $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph und injektiv. Zeigen Sie, dass gilt:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \mathrm{d}\zeta \quad \text{für alle } w \in f(D_r(a)).$$

Hinweis: Verwenden Sie den Residuensatz.

48. Trigonometrische Integrale

(a) Es seien $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ mit $Q \not\equiv 0$ und

$$S(x, y) := \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Weiter sei $Q(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^{2\pi} S(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{z_0 \in D_1(0)} \operatorname{res}_{z_0} \widetilde{S}(z)$$

mit

$$\widetilde{S}(z) := \frac{1}{z} S\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

(b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $a > 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + \cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Abgabetermin: Dienstag, 10. Juli 2018 um 12 Uhr