Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 10

41. Wachstumslemma für Polynome und rationale Funktionen

 (a) (1 Punkt) Es sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad $m \geq 0$ mit $p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$, $a_m \neq 0$. Es sei $R = \max\{1, \frac{2}{|a_m|} \sum_{k=0}^{m-1} |a_k|\}$. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt: $\frac{1}{2}|a_m||z|^m \leq |p(z)| \leq \frac{3}{2}|a_m||z|^m$.

 (b) (1 Punkt) Es seien $p, q \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ Polynome vom Grad m bzw. n. Zeigen Sie, daß es reelle Zahlen $K, L, R > 0$ gibt, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt: $K|z|^{m-n} \leq \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq L|z|^{m-n}$.

 (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist, wenn es reelle Zahlen $a, b > 0$ gibt, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|f(z)| \leq a + b|z|^n$. Welche Aussage erhält man für den Fall $n = 0$?

42. Anzahlformel für Null- und Polstellen

 (a) (2 Punkte) Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g \in \mathcal{M}(U)$, $r > 0$ und $a \in U$ so dass $B_r(a) \subset U$. Auf $\partial B_r(a)$ gebe es keine Polstellen von f oder g, und es gelte:

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

 für alle $z \in \partial B_r(a)$. Zeigen Sie, dass dann für die Gesamtanzahlen der Null- und Polstellen (mit Multiplizität) in $D_r(a)$ gilt:

$$\sum_{z \in D_r(a)} \nu_z(f) = \sum_{z \in D_r(a)} \nu_z(g).$$

 (b) (2 Punkte) Zeigen Sie: $f(z) = z^5 - z + 2$ hat genau fünf einfache Nullstellen in $D_2(0)$.

43. Rationale Funktionen

(a) (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie: f hat eine hebbare Singularität in ∞ genau dann, wenn f konstant ist.

Zeigen Sie außerdem: f hat einen Pol in ∞ genau dann, wenn f ein nicht-konstantes Polynom ist.

(b) (1 Punkt) Sei $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph. Zeigen Sie: Es gibt $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass

$$F(z) := (z - z_1)^{n_1} \ldots (z - z_k)^{n_k} f(z)$$

nur hebbare Singularitäten in $\mathbb{C}$ hat.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass jede meromorphe Funktionen wie in (b) eine rationale Funktionen ist.

44. Nullhomotopie und Nullhomologie.

Es seien $f(z) = (z^2 - 1)^2$, $\gamma_1(t) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\pi i t}}}$, $\gamma_2(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi i t}}$, $\gamma_3(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\pi i t}}$, $\gamma_4 = -\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\pi i t}}$, $t \in [0, 1]$, wobei die Wurzelfunktion durch den Hauptzweig des Logarithmus definiert ist. Weiter sei $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$.

Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (2 Punkte) Die Kurve $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma$ in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ist nullhomolog.

Berechnen Sie dazu die Umlaufzahlen um 0 und 1.

(b) (2 Punkte) Die Kurve $\tilde{\gamma}$ ist nicht nullhomotop.

Wählen Sie dazu eine lokale Umkehrfunktion g von f mit $g(\frac{1}{2}) = \gamma(0) = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$. Zeigen Sie, dass sich g längs jedes Weges in $\mathbb{C}^*$ holomorph fortsetzen lässt. Bestimmen Sie dann für die holomorphe Fortsetzung von g entlang $\tilde{\gamma}$ mit Hilfe von Aufgabe 40 den Wert von $g^{\tilde{\gamma}}$ am Endpunkt des Weges $\tilde{\gamma}$ und betrachten den Punkt $\gamma(4) = \gamma_4(1) = -\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Abgabetermin: Dienstag, 03. Juli 2018 um 12 Uhr