Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 18

Übungsblatt 1

In den Aufgaben 6 und 7 dürfen Sie alle aus der Analysis bekannten Ergebnisse über Folgen und Reihen in $\mathbb{R}$ verwenden.

5. Analytische Geometrie im Komplexen

   (a) (2 Punkte) Für welche Werte von $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ stellt die Lösungsmenge der Gleichung $A|z|^2 + Bz + C\bar{z} + D = 0$ einen Kreis vom Radius $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und Zentrum $c \in \mathbb{C}$ bzw. eine (reelle) Gerade durch die Punkte $a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$ dar ?

   (b) (2 Punkte) Eine *Drehstreckung* auf $\mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bezüglich der Standardbasis durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$, mit $r, \theta \in \mathbb{R}$, $r > 0$, gegeben ist.

   Zeigen Sie, daß eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann eine Drehstreckung in $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist, wenn es ein $a \in \mathbb{C}^\times$ gibt, so daß $f(z) = az$.

6. Konvergente Folgen und Reihen im Komplexen

   Es seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $z \in \mathbb{C}$. Man sagt: Die Folge (z_n) konvergiert gegen z, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

   Weiter setzen wir $S_n := \sum_{k=0}^n z_k$, $n \in \mathbb{N}$, für die n–te Partialsumme. Falls die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so nennen wir $S := \lim_{n\to\infty} S_n$ die der Folge (z_n) zugeordnete (komplexe) Reihe und schreiben $\sum_{n=0}^\infty z_n := S$. Man sagt: Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty z_n$ konvergiert absolut, falls $\sum_{n=0}^\infty |z_n|$ konvergiert. Zeigen Sie, daß gilt:

   (a) (1 Punkt) $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

   (b) (1 Punkt) $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.

   (c) (1 Punkt) Eine absolut konvergente komplexe Reihe konvergiert.

   (d) (1 Punkt) Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wir nennen die Reihe aus (d) die komplexe Exponentialfunktion $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

7. Sinus und Kosinus im Komplexen

   Es sei $\exp(z)$ die komplexe Exponentialfunktion aus Aufgabe 6(d). Weiter seien $\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ und $\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ die komplexe Sinus– bzw. Kosinusfunktion. Zeigen Sie, daß gilt:

   (a) (1 Punkt) Die Reihen $\sin(z)$ und $\cos(z)$ konvergieren absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

   (b) (1 Punkt) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

   (c) (1 Punkt) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Geben Sie damit einen alternativen Beweis der Formel von de Moivre in Aufgabe 2.

   (d) (1 Punkt) $\operatorname{Re}\exp(z) = \mathrm{e}^x \cos y$, $\operatorname{Im}\exp(z) = \mathrm{e}^x \sin y$, $|\exp(z)| = \mathrm{e}^x$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

8. Selbstabbildungen von Teilmengen von $\mathbb{C}$

   (a) (1 Punkt) Die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ besteht aus allen komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil.

   Wir betrachten die Abbildung $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto -\frac{1}{z}$. Zeigen Sie, daß $S(z) \in \mathbb{H}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{H}$, und daß $S \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

   (b) (1 Punkt) Es seien $z, a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß gilt: $|1 - z\bar{a}|^2 - |z - a|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |a|^2)$.

   (c) (1 Punkt) Die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ besteht aus allen komplexen Zahlen vom Betrag kleiner als 1.

   Für $a \in \mathbb{E}$ betrachten wir die Abbildung $\varphi_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z-a}{z\bar{a}-1}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (b), daß gilt: $\varphi_a(z) \in \mathbb{E}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{E}$, und $|\varphi_a(z)| = 1$ genau dann, wenn $|z| = 1$.

   (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Abgabetermin: Dienstag, 24. April um 12:00 Uhr