Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger, Dr. Santosh Kandel
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie
SS 18

Übungsblatt 0

1. Komplexe Zahlen

   Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$.

$$\left(\frac{7+i}{3-i}\right)^4, \qquad \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}+\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}, \qquad \sum_{k=0}^{7}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

2. Formel von de Moivre

   Es sei $\varphi\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß für alle $m\in\mathbb{Z}$ gilt:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m=\cos(m\varphi)+i\sin(m\varphi).$$

   Benutzen Sie dazu vollständige Induktion.

3. Einheitswurzeln

   (a) Es sei $p\in\mathbb{C}[z]$ mit $p(z)=z^m-1$ für $m\in\mathbb{N}$. $\zeta\in\mathbb{C}$ heisst m-te Einheitswurzel, falls ζ eine Nullstelle von p ist. Zeigen Sie, daß es zu jedem $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ genau m verschiedene m-te Einheitswurzeln gibt, nämlich $\zeta_m^{(k)}:=\cos(2\pi\frac{k}{m})+i\sin(2\pi\frac{k}{m})$, $k\in\{0,\ldots,m-1\}$. Benutzen Sie dazu Aufgabe 2.

   (b) Zeigen Sie, daß gilt: $\sum_{k=0}^{m-1}\zeta_m^{(k)}=0$ und $\prod_{k=0}^{m-1}\zeta_m^{(k)}=(-1)^{m+1}$. Erklären Sie damit das letzte Resultat aus Aufgabe 1.

4. Quadratwurzel

   Es sei $\sqrt{\ }:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $x\mapsto\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von $x\mapsto x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine Umkehrfunktion von $z\mapsto z^2$, $z\in\mathbb{C}$.

   (a) Es sei $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von $f(z)$ als Funktion von x und y. Setzen Sie dazu $f(z)=u+iv$ an und bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $(u+iv)^2=x+iy$.

(b) Bestimmen Sie $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u + iv = f\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$. Drücken Sie außerdem sowohl das Argument als auch die Werte von f durch Polarkoordinaten aus und vergleichen Sie mit Aufgabe 3(a).

Bearbeitung: Freitag, 20. April 2018 in den Übungen.